HEURISTICKÉ PRÍSTUPY K MINIMALIZÁCII B FUNKCIÍ

Algoritmus ESPRESSO

Východiskom pre algoritmus ESPRESSO je určité pokrytie množiny $\mathbf{F_1}$ funkcie **f** úplným súborom implikantov, ktoré nemusia byť prosté.

Algoritmus minimalizácie vyjadrenia B-funkcie pracuje v troch základných krokoch:

1. Prvým krokom je **expanzia Implikantov,** ktorá z implikantov získaných v predchádzajúcom kroku vytvára prosté implikanty. Vo vyjadrení implikantov sa postupne skúma premenná za premennou, či je možné ju vynechať bez toho, aby sa pokryli body z množiny $\mathbf{F_0}$ funkcie **f**. V závislosti od poradia skúmaných premenných môžeme získať rozličné súbory prostých implikantov. Poradie skúmaných premenných sa určuje heuristicky.
2. V kroku **iredundancia** zo získaného súboru vyberieme iredundantný súbor PI, ktorý nemusí byť minimálny. Postup je podobný riešeniu mriežky PI. Ak nájdené vyjadrenie funkcie **f** je lepšie než predchádzajúce, tak sa uloží**.**
3. Ak získané vyjadrenie nie je uspokojivé, vynechávaním jednotlivých premenných sa vykonáva **redukcia implikantov**, aby sa získal iný úplný súbor implikantov a pokračuje sa opäť krokom 1.

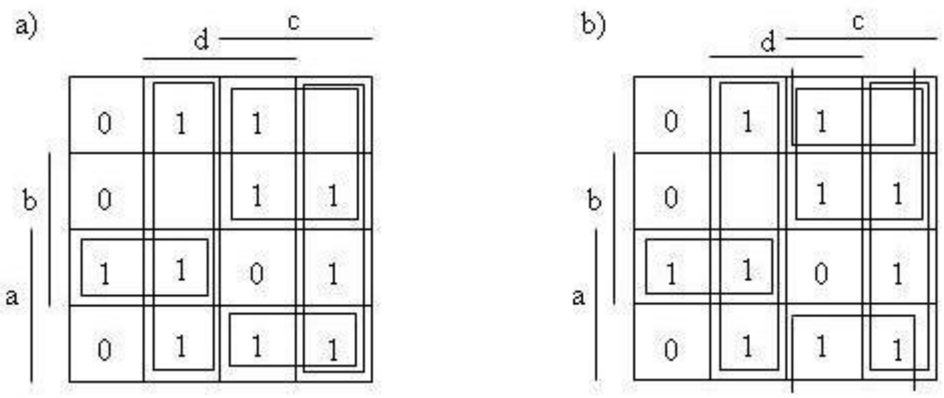
Príklad minimalizácie funkcie **f(a,b,c,d) = [0,4,8,15 (2,5)].**

Ak za východiskové zoberieme vyjadrenie **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.**, ktoré je znázornené na Obr.5. 11a, na jeho realizáciu potrebujeme obvod s celkovým počtom vstupov 21.

$$\mathbf{f = a\ b\ \bar{c} + \bar{c}\,d + \bar{a}\ c + c\ \bar{d}} + \mathrm{a}\ \mathbf{\bar{b}\ c} \tag{5.1}$$

Podľa kroku 1 môžeme vynechaním premennej **a** v implikante $\mathbf{a\,\bar{b}\ c}$ rozšíriť ho na prostý implikant $\mathbf{\bar{b}\ c}$**,** čím vznikne vyjadrenie v IDNF (5.3) znázornené na Obr.5. 1b, na realizáciu ktorého potrebujeme obvod s celkovým počtom vstupov 20. Vyjadrenie (5.3) je jednoduchšie než(5.2), preto ho uložíme.

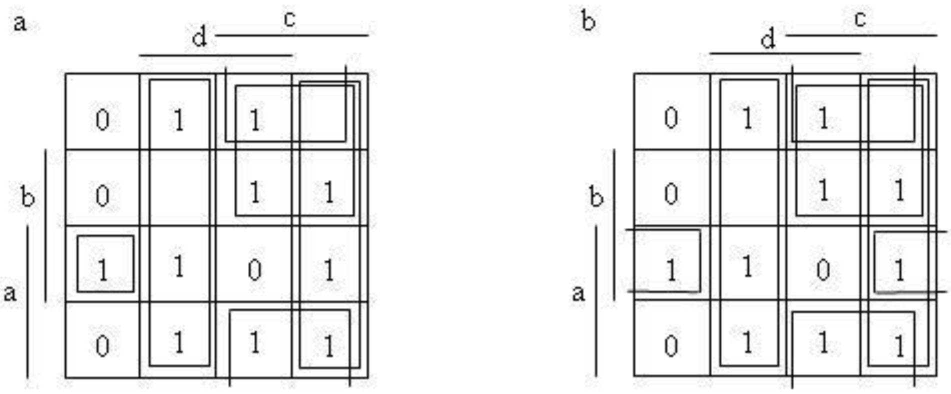
$$\mathbf{f = a\ b\ \bar{c} + \bar{c}\,d + \bar{a}\ c + c\ \bar{d} + \bar{b}\ c} \tag{5.3}$$



Obr.5. 1 Rozklad funkcie na súčet implikantov podľa vyjadrenia **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.** – a)

Redukciou implikantu $\mathbf{a\,b\,\bar{c}}$**,** ktorá vznikne pridaním premennej $\mathbf{\bar{d}}$ a následnou expanziou, ktorá vznikne vynechaním premennej $\mathbf{\bar{c}}$**,** získame nové vyjadrenie (5.4) znázornené na Obr.5.2a,b.

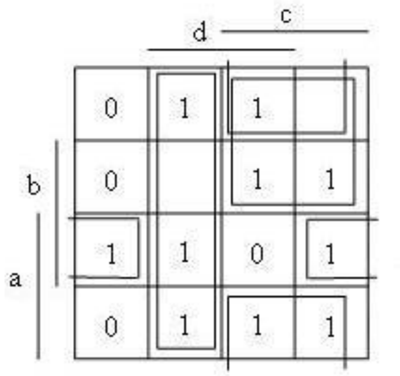
$$\mathbf{f = a\,b\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{c}d + \bar{a}\,c + c\,\bar{d} + \bar{b}\,c = a\,b\,\bar{d} + \bar{c}d + \bar{a}\,c + c\,\bar{d} + \bar{b}\,c} \qquad (5.4)$$



Obr.5. 2 Rozklad funkcie na súčet implikantov podľa vyjadrenia (5.4)

V kroku iredundancia z vyjadrenia (5.4) sa vynechá redundantný súčin $\mathbf{c\,\bar{d}}$ a získame IDNF (5.5) znázornenú na Obr.5.3, na realizáciu ktorej potrebujeme obvod s celkovým počtom vstupov 17. Vyjadrenie (5.5) je jednoduchšie než (5.3), preto ho uložíme.

$$\mathbf{f = a\,b\,\bar{d} + \bar{c}d + \bar{a}\,c + \bar{b}\,c} \qquad (5.5)$$



Obr.5.3 Minimálna DNF

Výber implikantov a výber premenných pre vykonanie expanzie resp. redukcie nie je jednoznačný a preskúmať všetky možnosti môže byť časovo veľmi náročné, preto sa uplatňujú rozličné stratégie náhodného výberu.

V našom príklade ďalším postupom získať jednoduchšie vyjadrenie sa nepodarilo, preto výsledkom minimalizácie je vyjadrenie (5.5), ktoré predstavuje minimálnu disjunktívnu normálnu formu zadanej funkcie. Jej zodpovedajúce konfigurácie prostých implikantov sú na Obr.5.3.

Proces minimalizácie sa môže zefektívniť, ak zo súboru implikantov sa vyčlenia podstatné PI a bude sa hľadať pokrytie len pre tie body, ktoré nie sú pokryté podstatnými PI.

Algoritmus BOOM

Algoritmus BOOM obsahuje podobné kroky ako ESPRESSO, avšak samotný postup sa čiastočne líši. Algoritmus BOOM môžeme rozdeliť do dvoch základných fáz.

Prvá fáza zaisťuje vytvorenie úplného súboru prostých implikantov jednej výstupnej funkcie. Prebieha v dvoch na seba nadväzujúcich krokoch.

- Prvým krokom je ***hľadanie pokrytia***, ktoré generuje implikanty potrebné k pokrytiu množiny F1 príslušnej funkcie.
- Druhým krokom je ***expanzia Implikantov***, ktorá z implikantov získaných v predchádzajúcom kroku vytvára prosté implikanty.

V prípade minimalizácie vyjadrenia funkcií obvodu s väčším počtom výstupných funkcií, prvá fáza sa použije pre každú výstupnú funkciu.

V druhej fáze sa vykonáva **r*edukcia Implikantov***, prostredníctvom ktorej z predchádzajúcich výsledkov sa vytvoria skupinové implikanty a následne sa rieši problém pokrytia skupiny B-funkcií. K vytvoreniu požadovaného výstupu však nemusia byť niektoré implikanty nevyhnutné (sú nutné pre iné výstupy). Tieto implikanty môžu byť redundantné vo výslednom riešení a môžeme ich z riešenia vylúčiť. Toto sa deje na konci minimalizácie riešením problému pokrytia nezávisle pre každú výstupnú funkciu v kroku ***výstupná redukcia***.

Hľadanie pokrytia

Podstata kroku ***hľadanie pokrytia*** spočíva vo výbere najvhodnejšej premennej, ktorá by mohla byť pridaná k vytváranému elementárnemu súčinu. Zvyšovaním počtu premenných sa redukuje n-rozmerná kocka. Premenné pridávame dovtedy, kým sa z daného elementárneho súčinu nevytvorí implikant, čo nastáva v okamihu, keď prienik vytváranej kocky s množinou $\mathbf{F_0}$ je ∅. Algoritmus sa pri hľadaní zároveň snaží, aby vygenerovaný implikant pokryl čo najväčší počet bodov z množiny $\mathbf{F_1}$.

Z uvedeného dôvodu začíname vždy od najfrekventovanejšej premennej v množine $\mathbf{F_1}$ zvolenej výstupnej funkcie. Ak takých premenných je viac, vyberáme tú, ktorej výskyt v množine $\mathbf{F_0}$ je minimálny. Zvolená premenná tvorí kocku s rozmerom **n-1**. V prípade, že vytváraná kocka nepokrýva žiaden bod s hodnotou “0” , potom zodpovedá implikantu zadanej funkcie. Pokiaľ to ale tak nie je, celý proces sa opakuje s ďalšou najfrekventovanejšou premennou v poradí. Proces tvorby implikantu končí, ak prienik vytváranej kocky s množinou $\mathbf{F_0}$ je ∅.

Po vygenerovaní implikantu odstránime všetky body z množiny $\mathbf{F_1}$, ktoré už sú pokryté. Vznikne tak redukovaná množina $\mathbf{F_1}$ a celý postup sa opakuje, pokiaľ sa nezíska úplný súbor implikantov pokrývajúci celú množinu $\mathbf{F_1}$ minimalizovanej funkcie.

Príklad:

Majme definovanú B-funkciu s 10 premennými **x0, ..., x9** zadanú v Tab.5.1. V prvom kroku z pravdivostnej tabuľky sa vyberú všetky kombinácie vstupných premenných, pri ktorých výstup nadobúda hodnotu “**1**”. Následne v stĺpcoch vybratých riadkov, ktoré sú v Tab.5.1 zvýraznené, sa spočítajú výskyty hodnôt “**1**” a ”**0**”, ich počet sa zapíše do tabuľky.

Tab.5.1 Pravdivostná tabuľka zadanej funkcie

Dt	**x0**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**f**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
2	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
3	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
5	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
6	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
8	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
9	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**

Tab.5.2 **Výskyty hodnôt “0“ resp. “1“ pre jednotlivé premenné v množine F_1**

	X0	X1	X2	**X3**	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	3	4	3	**5**	3	2	2	4	4	4
1	3	2	3	1	3	4	4	2	2	2

Tab.5.3 **Výskyty hodnôt “0“ resp. “1“ pre jednotlivé premenné v množine F_0**

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	2	2	1	**1**	4	1	1	2	3	3
1	2	2	3	3	0	3	3	2	1	1

Z

Tab.5.2 sa vyberie premenná s najväčším počtom hodnôt “**1**“ resp. “**0**“ v množine $\mathbf{F_1}$. a s minimálnym počtom hodnôt “**1**“ resp. “**0**“ v množine $\mathbf{F_0}$. V našom prípade sa jedná o premennú $\bar{x}_3$. Táto premenná pokrýva aj nulové hodnoty, preto musí byť pridaná ďalšia premenná. Tým, že bola vybratá premenná $\bar{x}_3$

z ďalšieho kroku sa z vybraných riadkov vylúčia všetky kombinácie premenných, ktoré majú na pozícii $\mathbf{x_3}$ opačnú hodnotu (riadky číslo 3, 4, 5, 7 v Tab.5.1).

Tab.5.4 Redukovaná pravdivostná tabuľka zadanej funkcie pre $\overline{x}_3$.

Dt	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	f
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
2	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
8	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
9	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
6	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

V nasledujúcom kroku podľa Tab.5.5 je niekoľko premenných s najfrekventovanejším výskytom ($\overline{x}_1$, x_5, x_6, $\overline{x}_7$). *V takomto prípade zo štyroch možných premenných sa vyberie tá, ktorá ma naj*menší výskyt v množine $\mathbf{F_0}$. Okrem premennej x_5, ktorá sa vyskytuje aj v množine $\mathbf{F_0}$ a teda súčin $\overline{x}_3 x_5$ nie je implikantom funkcie **f**, ostatné premenné sa v množine $\mathbf{F_0}$ nevyskytujú, a s premennou $\overline{x}_3$ vytvárajú implikanty $\overline{x}_1 \overline{x}_3$, $\overline{x}_3 x_6$, $\overline{x}_3 \overline{x}_7$. Z nich sa zvolí jeden, napr. $\overline{x}_1 \overline{x}_3$, ktorý sa uloží a pokračuje sa ďalej vo vyhľadávaní.

Tab.5.5 Výskyty hodnôt **0** a **1** jednotlivých premenných v množine $\mathbf{F_1}$ pre $\overline{x}_3$

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	3	**4**	3	-	2	1	1	**4**	3	3
1	2	1	2	-	3	**4**	**4**	1	2	2

Tab.5.6 Výskyty hodnôt **0** a **1** jednotlivých premenných v množine $\mathbf{F_0}$ pre $\overline{x}_3$

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	1	**0**	1	1	1	0	1	**0**	1	1
1	0	1	0	0	0	**1**	**0**	1	0	0

Ďalší postup je podobný ako v predchádzajúcom prípade s tým rozdielom, že v tomto kroku sa už neuvažuje o bodoch, ktoré už boli v predošlom kroku pokryté.

Tab.5.7 Redukovaná pravdivostná tabuľka zadanej funkcie po výbere implikantu $\bar{x}_1\ \bar{x}_3$.

Dt	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	f
5	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
9	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
3	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0

Tab.5.8 Výskyty hodnôt **0** a **1** jednotlivých premenných v redukovanej množine $\mathbf{F_1}$

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2
1	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0

Tab.5.9 Výskyty hodnôt **0** a **1** jednotlivých premenných v množine $\mathbf{F_0}$

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	2	2	1	1	0	1	1	2	3	3
1	2	2	3	3	4	3	3	2	1	1

Nájsť implikant, ktorý by pokryl zvyšné 2 body z množiny $\mathbf{F_1}$ sa v tomto prípade nepodarilo, preto bol vybratý implikant $\mathbf{x_4}$, ktorý pokrýva bod 9 z množiny $\mathbf{F_1}$ a nepokrýva žiaden bod z množiny $\mathbf{F_0}$.

Tab.5.10 Redukovaná pravdivostná tabuľka zadanej funkcie po výbere implikantov $\bar{x}_1\ \bar{x}_3$ **a** x_4.

Dt	**x0**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**f**
5	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
3	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0

Tab.5.11 Výskyty hodnôt **0** a **1** jednotlivých premenných v redukovanej množine $\mathbf{F_1}$

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0

Tab.5.12 Výskyty hodnôt **0** a **1** jednotlivých premenných v množine $\mathbf{F_0}$

	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0	2	2	1	1	4	1	1	2	3	3
1	2	2	3	3	0	3	3	2	1	1

Keďže v redukovanej množine $\mathbf{F_1}$ je už len **1** bod, do implikantu vyberáme premenné, ktoré majú minimálny výskyt v množine $\mathbf{F_0}$**.** Sú to premenné $\bar{x}_5$, $\bar{x}_6$. Z nich vytvorený implikant $\bar{x}_5\ \bar{x}_6$ nepokrýva žiaden bod z množiny $\mathbf{F_0}$. Získané implikanty $\bar{x}_1\ \bar{x}_3$ (pokrýva body **0,1,2,8**), x_4 (pokrýva body **1, 8, 9**), **a** $\bar{x}_5\ \bar{x}_6$ (pokrýva body **0,5**), tvoria úplný systém implikantov. V našom prípade **expanzia implikantov** sa neuplatní, lebo nájdený úplný systém implikantov obsahuje iba prosté implikanty.

Redukcia implikantov,

Aby sa mohol získať iný úplný systém prostých implikantov, ktorý môže byť jednoduchší, najskôr sa vykoná redukcia a potom expanzia implikantov.

Pridaním premennej $\mathbf{x_6}$ sa implikant $\bar{\mathbf{x}}_1\ \bar{\mathbf{x}}_3$ redukuje na $\bar{\mathbf{x}}_1\ \bar{\mathbf{x}}_3\ \mathbf{x_6}$**,** ktorý pokrýva body **1,2,8** (bod **0** je pokrytý implikantom $\bar{\mathbf{x}}_5\ \bar{\mathbf{x}}_6$).

Expanzia implikantov.

Expanzia implikantov sa vykonáva podobne ako v algoritme ESPRESSO. Odoberanie premenných je postupné a po každej expanzii sa realizuje kontrola, či nový elementárny súčin nepretína množinu **“$\mathbf{F_0}$“** danej funkcie. Kontrola prebieha jednoduchým porovnávaním daného súčinu so všetkými súčinmi z množiny **“$\mathbf{F_0}$“**.

O expanziu implikantov sa v algoritme BOOM starajú tri metódy líšiace sa zložitosťou a kvalitou získaných výsledkov.

- *Postupné odoberanie premenných v (Sequential IE)* – odoberá postupne jednu premennú po druhej zo všetkých elementárnych súčinov.
- *Viacnásobné postupné odoberanie premenných (Multiple Sequential IE)* – skúša všetky možnosti postupného odoberania premenných zakaždým s inou štartovacou pozíciou.
- *Kombinované odoberanie premenných* (Exhaustive IE) – skúša rôzne kombinácie premenných.

Z predchádzajúceho teda vyplýva, že expanziou jedného implikantu môže vzniknúť niekoľko rozdielnych prostých implikantov.

V zvolenom príklade vynechaním premennej $\bar{\mathbf{x}}_1$ implikant $\bar{\mathbf{x}}_1\ \bar{\mathbf{x}}_3\ \mathbf{x_6}$ expanduje na $\bar{\mathbf{x}}_3\ \boldsymbol{x_6}$**,** ktorý v množine $\mathbf{F_1}$ pokrýva body **1,2,8,9** a nepokrýva žiaden bod z množiny $\mathbf{F_0}$**.**

Iredundancia

Implikant $\mathbf{x_4}$ sa stáva redundantným, lebo ním pokryte body sú pokryte implikantmi $\bar{\mathbf{x}}_3\ \boldsymbol{x_6}$ a $\bar{\mathbf{x}}_5\ \bar{\mathbf{x}}_6$**,** ktoré tvoria úplný systém implikantov**.**

Konečný výraz pokrývajúci všetky body z množiny $\mathbf{F_1}$ bude mať teda tvar

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{x}}_3\, \boldsymbol{x_6} + \bar{\mathbf{x}}_5\, \boldsymbol{x_6}$$

Pre skupinu funkcii sa môže použiť iný postup. Na začiatku sa vytvoria skupiny bodov patriace tým istým funkciám tak, aby boli pokryté všetky body. Pre vytvorené skupiny bodov sa určia implikanty, ktoré ich pokrývajú. Pri výbere premenných na vytvorenie implikantu sa postupuje podobne ako pri hľadaní pokrytia jednej funkcie, ale sa musí zabezpečiť, aby nedošlo k prekrytiu so žiadnym nulovým bodom funkcií, pre ktoré sa implikant vytvára.

Takto získané implikanty už predstavujú platné riešenie. Avšak tieto výsledky je možné ďalej zjednodušiť redukciou počtu premenných. Algoritmus tejto úpravy je založený na expanzii implikantov, pri ktorej sa heuristicky vyberajú vynechávané premenné. Zvolená metóda sa stará o vyváženú expanziu všetkých termov (odstraňovanie premenných sa vykonáva v náhodnom poradí). Ak expandovaný implikant nepokrýva žiadnu “0” môžeme ho zaradiť do výsledného riešenia, v opačnom prípade odstránenú premennú vrátime späť. Tento postup opakujeme dovtedy, kým takto nie sú vyskúšané všetky premenné.