3 ALGEBRY LOGIKY

Pre každý úplný súbor logických funkcií je možné vytvoriť príslušnú algebru logiky
V praxi sa najviac uplatnila
Boolova algebra,
Peirceova algebra a
Shefferova algebra.

3.1 BOOLOVA ALGEBRA

Boolova algebra (B-algebra) je taká množina **B**, ktorá obsahuje nezávisle premenné **a, b, c, ...** s dvoma diskrétnymi hodnotami **0** a **1**, v ktorej sú definované operácie logického **súčtu, súčinu a inverzie** tak, že platí nasledovný súbor axióm**:**

1. Neutrálnosť konštanty: Existujú prvky **0, 1** $\in$ **B**, že pre ľubovoľnú premennú **a** $\in$ **B** platí:

$$\mathbf{a + 0 = a}$$

$$\mathbf{a \, . \, 1 = a}$$

2. Vylúčenie tretieho: Pre každý prvok **a** $\in$ **B** existuje jemu zodpovedajúci negovaný prvok taký, že platí:

$$\mathbf{a + \bar{a} = 1}$$

$$\mathbf{a \, . \, \bar{a} = 0}$$

3. Komutatívnosť: Pre každé dva prvky **a, b** $\in$ **B** platí:

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

$$\mathbf{a \, . \, b = b \, . \, a}$$

4. Distributívnosť: Pre každé tri prvky **a, b, c** $\in$ **B** platí:

$$\mathbf{a + b \, . \, c = (a + b) \, . \, (a + c)}$$

$$\mathbf{a \, . \, (b + c) = a \, . \, b + a \, . \, c}$$

Z axióm vyplýva, že v Boolovej algebre platí **princíp duality,** ktorý možno vyjadriť takto: Ak v algebre platí tvrdenie (axióma, veta) **x**, tak platí aj duálne tvrdenie $\mathbf{x_d}$, ktoré vznikne z **x** zámenou operácií **+**, **.** a prvkov **0, 1** podľa schémy: **+ $\rightarrow$.; . $\rightarrow$ +; 0 $\rightarrow$ 1; 1 $\rightarrow$ 0.** Keď vychádzame z princípu duality, pri dôkazoch tvrdení vynechávame dôkazy platnosti duálnych tvrdení.

Pravidlá agresívnosti konštanty

$a . 0 = 0$

$a + 1 = 1$

Asociatívne pravidlá:

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a . (b . c) = (a . b) . c$

P**ravidlá pohltenia (absorbcie).**

$a + a = a$

$a . a = a$

$a + ab = a$

$a . (a + b) = a$

Pravidlá pohltenia inverzie:

$a + \overline{a} b = a + b$

$a . (\overline{a} + b) = a . b$

P**ravidlá spojovania:**

$a . b + a . \overline{b} = a$

$(a + b) . (a + \overline{b}) = a$

De Morganove pravidlá o vytvorení inverzie:

$$\overline{a + b} = \overline{a} . \overline{b}$$

$$\overline{a . b} = \overline{a} + \overline{b}$$

De Morganove pravidlá sa môžu rozšíriť aj na funkcie o **n** premenných. Platí:

$$\overline{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \overline{a}_1 . \overline{a}_2 . ... . \overline{a}_n$$

$$\overline{a_1 . a_2 ... a_n} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + ... + \overline{a}_n$$

Pravidlo dvojnásobnej inverzie

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Shannonove pravidlo

$$\overline{(f(x_1, x_2, ..., x_n), +, .)} = (f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n), ., +)$$

3.2 PEIRCEOVA ALGEBRA

Peirceová algebra (P-algebra) používa iba **jedinú funkciu - inverziu logického súčtu**, Prevod z P-algebry do B-algebry sa vykonáva na základe vzťahu

$$\mathbf{a \downarrow b = \overline{a + b}}$$

$$\mathbf{(a \downarrow) = a \downarrow a = \overline{a + a} = \bar{a}}$$

Prevod výrazu z B-algebry do P-algebry sa vykonáva na základe vzťahov

$$\mathbf{a + b = \overline{\overline{a + b}} = (a \downarrow b) \downarrow}$$

$$\mathbf{a \, . \, b = \overline{\overline{a \, . \, b}} = \overline{(\bar{a} + \bar{b})} = (a \downarrow) \downarrow (b \downarrow)}$$

$$\mathbf{\bar{a} = \overline{a + a} = a \downarrow a = (a \downarrow)}$$

3.3 SHEFFEROVA ALGEBRA

Shefferová algebra (S-algebra) **používa** tiež len **jedinú funkciu - inverziu logického súčinu**,

$$\mathbf{a \mid b = \overline{a \, . \, b}}$$

Prevod z B-algebry do S-algebry sa vykonáva na základe vzťahov

$$\mathbf{a + b = \overline{\overline{a + b}} = \bar{a}.\bar{b} = (a \mid) \mid (b \mid)}$$

$$a.b = \overline{\overline{a.b}} = \overline{a \mid b} = (a \mid b) \mid$$

$$\mathbf{\bar{a} = \overline{a.a} = a \mid a = (a \mid)}$$

Vyjadrenie funkcie v S-algebre sa môže získať aj z vyjadrenia v P-algebre na základe vzťahu

$$\mathbf{a \downarrow b = [(a \mid) \mid (b \mid)] \mid}$$

Vyjadrenie funkcie v P-algebre z vyjadrenia v S-algebre sa môže získať na základe vzťahu

$$\mathbf{a \mid b = [(a \downarrow) \downarrow (b \downarrow)] \downarrow}$$