4 ALGEBRAICKÉ VYJADRENIE B-FUNKCIÍ

-vyjadruje možnosti ich realizácie.

4.1 NORMÁLNE FORMY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZOV B-ALGEBRY

Disjunktívna normálna forma (DNF) - výraz pozostávajúci z logického súčtu navzájom rôznych elementárnych súčinov.

$$f = x_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 + x_1 x_3 \qquad \textbf{(4.1)}$$

Elementárny súčin - výraz pozostávajúci z logického súčinu ľubovoľného počtu premenných, ktoré sa v ňom vyskytujú buď priamo alebo invertovane pričom každá premenná v tomto výraze sa vyskytuje maximálne jedenkrát.

Úplný elementárny súčin B-funkcie **$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - e**lementárny súčin , v ktorom sa každá nezávisle premenná **x_i ($i = 1, 2, ..., n$)** vyskytuje práve raz a to buď priamo alebo invertovane.

Rád r elementárneho súčinu - počet premenných v elementárnom súčine ($r \leq n$**).**

Konjunktívna normálna forma (KNF) - súčin navzájom rôznych elementárnych súčtov.

$$f = (x_1 + \overline{x}_2).(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3).x_3 \qquad \textbf{(4.2)}$$

Normálnou formou typu g_1/g_2 nazývame výraz v tvare

$$T_1\ g_2\ T_2\ g_2\ ...\ g_2\ T_m \qquad \textbf{(4.3)}$$

kde **$T_1, T_2, ... T_m, m \geq 1$** sú navzájom rôzne termy typu

$$T_1 = \tilde{x}_{i1} g_1 \tilde{x}_{i2} g_1 ... g_1 \tilde{x}_{ik}, k \geq 1$$

kde $\tilde{x}_{ij}$, $j = 1, 2, ..., k$ sú navzájom rôzne premenné x_{ij} resp. $\overline{x}_{ij}$, $g_1, g_2 \in \{.\ , +, \downarrow, \uparrow, ...\}$.

4.1.1 Rozklad B-funkcie na súčet implikantov a súčin implicentov

Čiastočné usporiadanie na množine boolovských funkcií s reláciou **"≤"**

$$\mathbf{g \leq f \Longleftrightarrow g + f = f}.$$

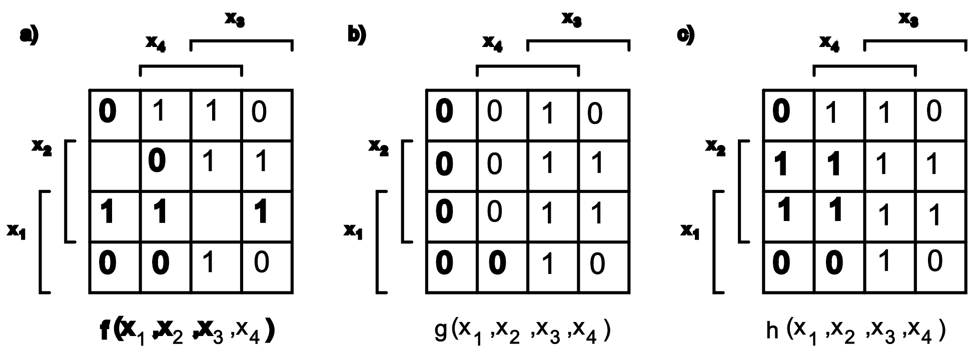
Funkcia $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ je implikantom funkcie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ak **$g \leq f$**.

Funkcia **$g(x_1, x_2, ..., x_n)$** je **implikantom funkcie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$**, ak množina **G_1** tých bodov, v ktorých funkcia **g** nadobúda hodnotu **1** je časťou množiny **F_{1x}** **($G_1 \subset F_{1x}$)**

Funkcia **$h(x_1, x_2, ..., x_n)$** je **implicentom funkcie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$**, ak **$h \geq f$.**

Funkcia **$h(x_1, x_2, ..., x_n)$** je **implicentom funkcie $f(x_1, x_2, ..., x_n)$**, ak množina **H_0** tých bodov, v ktorých funkcia **h** nadobúda hodnotu **0**, je časťou množiny **F_{0X}** **($H_0 \subset F_{0X}$)**

Príklad implikantu a implicentu B-funkcie **$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$** je uvedený na **obr. 4.1.**



Obr. 4.1 Znázornenie implikantu a implicentu B-funkcie
a) zadaná B-funkcia; b) implikant; c) implicent

Systém implikantov (implicentov) - množina implikantov (implicentov) jednej B-funkcie**.**

Úplný systém implikantov (implicentov) - pokrýva každý bod z množiny $\mathbf{F_1}$ **(**$\mathbf{F_0}$**)** aspoň jedným implikantom (implicentom) z daného systému **S**.

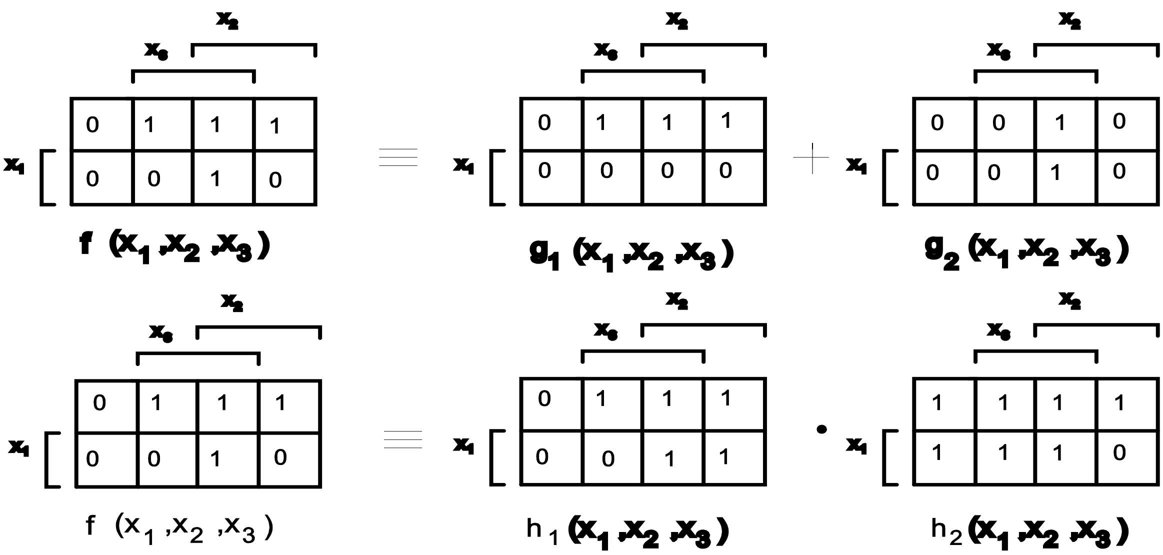
$$F_1 \subset \bigcup_{S} G_{1i} \qquad \left(F_o \subset \bigcup_{S'} H_{oj} \right) \qquad \textbf{(4.4)}$$

Každá B-funkcia sa môže vyjadriť ako logický sučet implikantov (súčin implicentov), ktoré predstavujú úplný systém **S (S')** implikantov (implicentov).

$$\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigcup_{i} g_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ \ g_i \in S} \qquad \textbf{(4.5)}$$

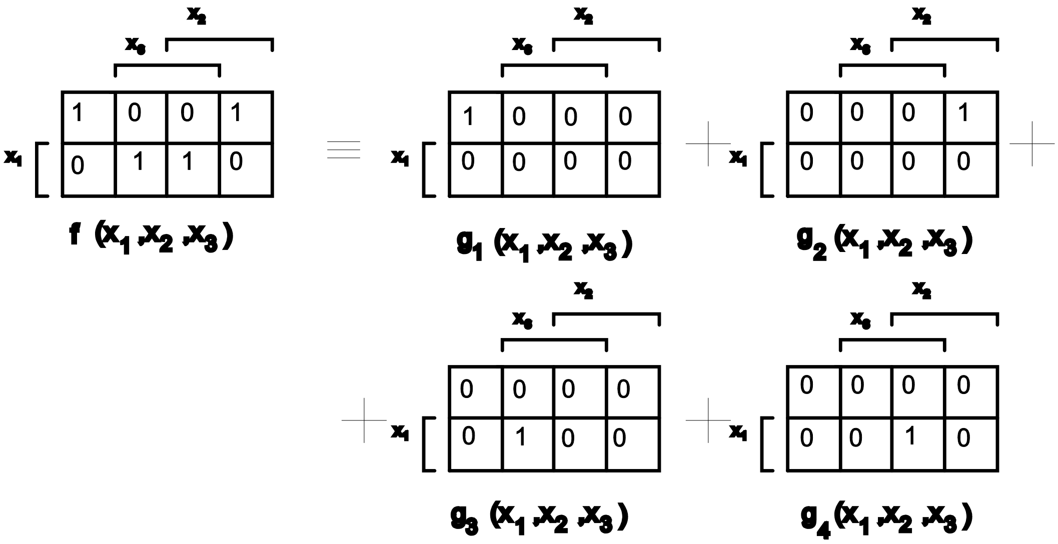
$$\mathbf{f(x_1, x_2, ... , x_n) = \prod_{j} h_j(x_1, x_2, ... , x_n),\ \ h_j \in S'} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Príklad rozkladu B-funkcie $\mathbf{f(x_1, x_2, x_3)}$ na súčet implikantov a súčin implicentov



Ak sa má získať vyjadrenie B-funkcie v tvare **DNF** (**KNF**), potom sa musí urobiť rozklad na také implikanty (implicenty), ktoré sa dajú vyjadriť v tvare elementárneho súčinu (súčtu).

4.1.2 Úplná DNF a KNF B-funkcie



Obr. 4.3 Rozklad B-funkcie na súčet implikantov s jednou jednotkovou hodnotou

f = $g_1 + g_2 + g_3 + g_4$

($g_3 \equiv 1$) = ($x_1 \equiv 1$).($x_2 \equiv 0$). ($x_3 \equiv 1$)

Tab. 4.1 Vyjadrenie rovnoznačnosti premennej s konštantou

x_i	0	$x_i \equiv 0$	x_i	1	$x_i \equiv 1$
0 1	0 0	1 0	0 1	1 1	0 1

$$g_3 = x_1 \bar{x}_2 x_3$$

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \qquad \textbf{(4.7)}$$

Pre vyjadrenie implikantov z obr. 4.3 dostaneme

$g_1 = (x_1 \equiv 0) \,.\, (x_2 \equiv 0) \,.\, (x_3 \equiv 0) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

$g_2 = (x_1 \equiv 0) \,.\, (x_2 \equiv 1) \,.\, (x_3 \equiv 0) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$

$g_3 = (x_1 \equiv 1) \,.\, (x_2 \equiv 0) \,.\, (x_3 \equiv 1) = x_1 \bar{x}_2 x_3$

$g_4 = (x_1 \equiv 1) \,.\, (x_2 \equiv 1) \,.\, (x_3 \equiv 1) = x_1 x_2 x_3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \qquad (4.8)$$

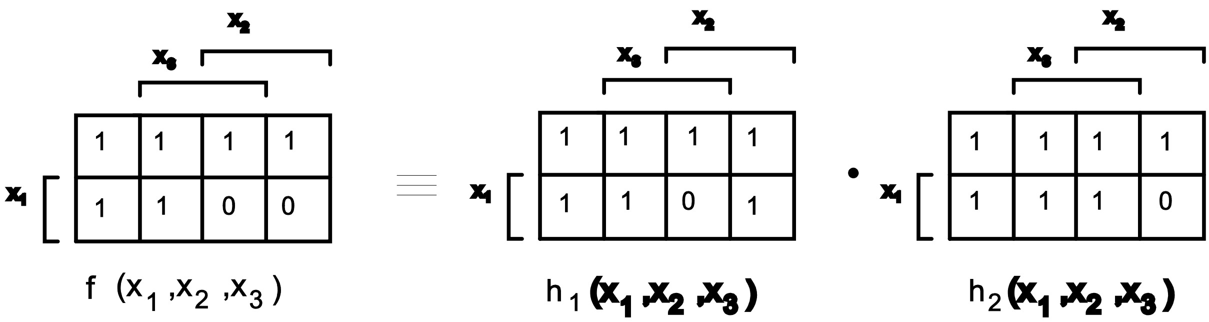
Výraz (4.8) pozostáva zo súčtu úplných elementárnych súčinov a predstavuje **úplnú DNF** zadanej B-funkcie. Všeobecné vyjadrenie **úplnej DNF** B-funkcie **$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$** je

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{k} g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{n} (x_i \equiv \sigma_{ij}) \qquad (4.9)$$

kde g_j sú implikanty B-funkcií **$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$**, ktoré pokrývajú len jeden bod funkcie **f** s hodnotou **1.**

k - počet bodov množiny **F_1**

σ_{ij} - hodnota premennej x_i v bode, v ktorom implikant g_j nadobúda hodnotu **1**.



Obr. 4.4 Rozklad B-funkcie na súčin implicentov s jednou nulovou hodnotou

$$(h_2 \equiv 0) = (x_1 \equiv 1) \,.\, (x_2 \equiv 1) \,.\, (x_3 \equiv 0) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \qquad (4.11)$$

Aplikovaním inverzie na (4.11) dostaneme

$$\bar{\bar{h}}_2 = h_2 = \overline{x_1 x_2 \bar{x}_3} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3).(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \qquad (4.14)$$

Všeobecné vyjadrenie úplnej **KNF** B-funkcie $\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$ je

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{m} h_j(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \neq \delta_{ij}) \qquad (4.15)$$

kde $\mathbf{h_j}$ sú implicenty B-funkcie $\mathbf{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$, ktoré nadobúdajú hodnotu **0** len v jednom bode z množiny $\mathbf{F_0}$ a v ostatných bodoch z oblasti definície nadobúdajú hodnotu **1**

m - počet bodov množiny $\mathbf{F_0}$

$\mathbf{ó_{ij}}$ - hodnota premennej $\mathbf{x_i}$ v bode, v ktorom implicent $\mathbf{h_j}$ nadobúda hodnotu **0**.

4.1.3 Skrátená DNF a KNF B-funkcie

Aplikáciou pravidla spojovania

$$xy + \overline{x}y = y \qquad (4.16)$$

resp.

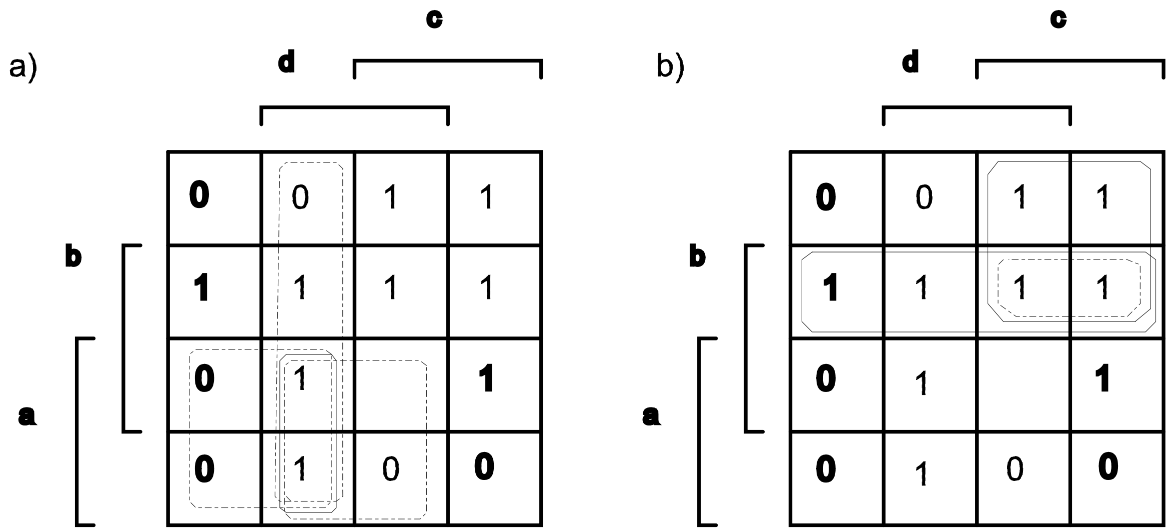
$$(x + y) . (\overline{x} + y) = y \qquad (4.17)$$

kde **x** je premenná a

y - elementárny súčin resp. súčet, ktorý neobsahuje premennú **x**,

na všetky možné dvojice elementárnych súčinov (súčtov) úplnej **DNF** (**KNF**) získa sa skrátená **DNF** (**KNF**).

Prostý implikant B-funkcie **f** je implikant **g**, vyjadrený v tvare **elementárneho súčinu** rádu **r**, ktorého **žiadna vlastná časť** (elementárny súčin rádu r'<r, získaný z **g** vynechaním jednej resp. viacerých premenných) **nie je implikantom funkcie f.**



Skrátená DNF B-funkcie **f** je vyjadrená logickým **súčtom všetkých prostých implikantov.**

Prostý implicent B-funkcie **f** je implicent **h**, vyjadrený v tvare elementárneho súčtu rádu **r**, ktorého žiadna vlastná časť (elementárny súčet rádu **r'<r**, získaný z **h** vynechaním jednej resp. viacerých premenných) nie je implicentom funkcie **f.**

Skrátená KNF B-funkcie **f** je daná logickým **súčinom všetkých prostých implicentov.**

Iredundantná DNF (**KNF**) danej B-funkcie **f** predstavuje logický súčet (súčin) prostých implikantov (implicentov) funkcie **f**, ktoré tvoria úplný systém implikantov (implicentov) funkcie **f** a pritom žiadna vlastná časť tohoto systému už netvorí úplný systém.

4.2 NORMÁLNE FORMY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZOV PEIRCEHO A SHEFFEROVEJ ALGEBRY

Normálne formy algebraických výrazov v Peirceho a Shefferovej algebre sa odvodia z normálnych foriem B-algebryaplikovaním pravidlá o dvojnásobnej inverzii a de Morganovho pravidla.

Vyjadrenie B-funkcie **f** v P-algebre tvaru **↓/↓** sa nazýva prvá **Peirceho normálna forma** (**1. PNF** alebo **NF ↓/↓**).

Prvá Peirceho normálna forma sa dá získať aj z **DNF** invertovanej funkcie.

Z uvedeného postupu vyplýva, že ľubovoľnú **KNF** funkcie **f** možno "priamo prepísať" na **1. PNF**, v ktorej sa operácie logického súčtu a súčinu nahradia Peirceho operáciami (šípkami). V prípade, že implicent $\mathbf{h_i}$ pozostáva iba z jednej premennej, potom premenná v tomto implicente sa invertuje.

$$\mathbf{f} = [(\overline{\tilde{x}}1 \downarrow \overline{\tilde{x}}_{21} \downarrow \ldots \downarrow \overline{\tilde{x}}_{n1}) \downarrow (\overline{\tilde{x}}_{12} \downarrow \overline{\tilde{x}}_{22} \downarrow \ldots \downarrow \overline{\tilde{x}}_{n2}) \downarrow \ldots \downarrow (\overline{\tilde{x}}_{1r} \downarrow \overline{\tilde{x}}_{2r} \downarrow \ldots \downarrow \overline{\tilde{x}}_{nr})] \downarrow \qquad (4.50)$$

Vyjadrenie B-funkcie v P-algebre tvaru **↓/↓/↓**sa nazýva **druhá Peirceho normálna forma** (**2. PNF**).

DNF B-funkcíe sa môže, priamo prepísať, do **2. PNF** tak, že sa uzavrú jednotlivé elementárne súčty do zátvoriek a nahradia sa všetky operácie logického súčtu a súčinu Peirceho operáciami, všetky premenné jednotlivých implikantov $\mathbf{g_i}$ (s výnimkou implikantov pozostávajúcich z jednej premennej) sa invertujú, t.j. ak premenná vystupovala v **DNF** priamo, bude v **2. PNF** vystupovať invertovane a naopak, invertovaná premenná z **DNF** bude v **2. PNF** vystupovať priamo a nad celým výrazom sa bude aplikovať Peirceho operácia.

Vyjadrenie tvaru |/| sa nazýva **prvá Shefferova normálna forma** (**1. SNF**).

Prvá Shefferova normálna forma sa môže získať priamo z **DNF** B-funkcie **f**, v ktorej sa uzavrú všetky elementárne súčiny do zátvoriek, nahradí sa každá operácia logického súčtu a súčinu Shefferovou operáciou a imlpikanty pozostávajúce z jednej premennej sa invertujú.

Vyjadrenie tvaru |/|/| sa nazýva **druhá Shefferova normálna forma** (**2. SNF**). Pri priamom prepise z **KNF** do **2. SNF** sa nahradí každá operácia logického súčtu a súčinu Shefferovou operáciou, všetky premenné jednotlivých implicentov $\mathbf{h_i}$ (s výnimkou implicentov pozostávajúcich z jednej premennej) sa invertujú.

Vytváranie jednotlivých normálnych foriem Peirceho a Shefferovej algebry sa môže stručne zhrnúť takto:

1. PNF vzniká z **KNF**; premenné neinvertujeme s výmimkou elementárnych súčtov rádu **r = 1;**

2. PNF vzniká z **DNF**; premenné invertujeme s výmimkou elementárnych súčinov rádu **r = 1;**

1. SNF vzniká z **DNF**; premenné neinvertujeme s výmimkou elementárnych súčinov rádu **r = 1;**

2. SNF vzniká z **KNF**; premenné invertujeme s výmimkou elementárnych súčtov rádu **r = 1;**

Z uvedeného vyplýva, že **1. PNF** svojím tvarom zodpovedá **2. SNF** (obidve sú odvodené z **KNF**) a naopak **2. PNF** zodpovedá **1. SNF**.

ďalšie dve zmiešané normálne formy - **NF .**/↓ resp. **NF +/**| sa môžu získať priamo z **DNF** resp. z **KNF** funkcie .