5 MINIMALIZÁCIA VYJADRENIA B-FUNKCIÍ

5.1 KRITÉRIA MINIMALIZÁCIE

C - koeficient úmerný cene realizovaného obvodu
m - počet typov prvkov (odpory, kondenzátory, diódy, tranzistory, integrované obvody a pod.),

$$C = \sum_{i=1}^{t} c_i \cdot p_i \qquad (5.1)$$

kde C_i je koeficient úmerný cene **i**-tého typu prvku
p_i - počet prvkov **i**-tého typu, potrebných na realizáciu obvodu.

$$C = p_m$$

kde p_m počet prvkov s najvyššou cenou

Cenu obvodu určuje počet kontaktov, rovný počtu písmen v algebraickom vyjadrení B-funkcií

$$C_k = \sum_{j=1}^{p} r_j \qquad (5.3)$$

kde **p** je počet elementárnych súčinov v **DNF** resp. súčtov v **KNF**;
r_j - rád **j**-tého elementárneho súčinu resp. súčtu.
DL (TTL) cena obvodu je prakticky úmerná **počtu diód (tranzistorov),**
q logických operácií s r_j premennými **(j = 1, 2, ..., q)**,

$$C_D = \sum_{j=1}^{q} r_j \qquad (5.4)$$

koeficient C_D zodpovedá celkovému **súčtu vstupov** všetkých logických členov

Pri vyjadrení B-funkcie tvaru **DNF (KNF)** je počet diód

$$C_D = p + \sum_{j=1}^{q} r_j \qquad (5.5)$$

kde **p** je počet všetkých elementárnych súčinov (súčtov),
q - počet všetkých elementárnych súčinov (súčtov) rádu $r_j>1$
r_j - rád j-tého elementárneho súčinu (súčtu). Predpokladá sa pritom, že $r_j>1$ pre **j = 1, 2, ...,p**.
V prípade realizácie obvodu skupinou B-funkcií je

$$C_D = p + \sum_{j=1}^{q'} r_j \qquad (5.6)$$

kde **q'** je počet navzájom rôznych elementárnych súčinov (súčtov) rádu $r_j>1$.

DTL - cena obvodu je prakticky úmerná **počtu tranzistorov**, ktorý je rovný **počtu operácií** v algebraickom vyjadrení B-funkcie, resp. **počtu logických členov** v obvode, ktorý dané vyjadrenie realizuje.

V prípade vyjadrenia B-funkcie v tvare **DNF** (**KNF**) počet tranzistorov je

$$C_T = q + 1 \tag{5.7}$$

kde **q** je počet elementárnych súčinov (súčtov) rádu $r_j > 1$.

Pre prípad realizácie obvodu, popísaného skupinou **k** B-funkcií je

$$C_T = q' + k \tag{5.8}$$

kde **q'** je počet navzájom rôznych elementárnych súčinov (súčtov).

Minimálna normálna forma - s **minimálnym počtom písmen.**

5.2 BLAKEOVA METÓDA URČOVANIA SKRÁTENEJ DNF

Podstata Blakeovej metódy spočíva v aplikovaní **pravidla zovšeobecneného spojovania**

$$x.g_1 + \bar{x}.g_2 = x.g_1 + \bar{x}.g_2 + g_1.g_2 \tag{5.9}$$

a **pravidla pohltenia**

$$g_1 + g_1.g_2 = g_1 \tag{5.10}$$

kde x je premenná, g_1, g_2 - elementárne súčiny.

Vychádzame pritom z **ľubovoľnej DNF,** v ktorej sa uplatňujú (5.9) a (5.10) na všetky možné dvojice, získa sa **skrátená DNF** funkcie **f.**

5.3 NELSONOVÁ METÓDA URČOVANIA SKRÁTENEJ DNF

Ak je B-funkcia zadaná v tvare **ľubovoľnej KNF,** potom podľa Nelsona skrátená **DNF** sa získa tak, že v **KNF**, na základe **distributívneho pravidla (roznásobenie)** sa odstránia všetky zátvorky a aplikuje sa pritom **pravidlo pohltenia.** Pohlcovanie sa s výhodou vykonáva už v priebehu roznásobovania zátvoriek, lebo zjednodušuje medzivýsledky násobenia.

Pre zadanú **KNF** B-funkcie

$$f = (\bar{a} + b) . (b + c) . (a + \bar{b} + \bar{d}) \qquad 5.14)$$

vzájomným roznásobením jednotlivých výrazov v zátvorkách dostaneme

$$f = (\bar{a}\, b + b + \bar{a}\, c + b\, c) . (a + \bar{b} + \bar{d}) = (b + \bar{a}\, c) . (a + \bar{b} + \bar{d}) =$$

$$= a\, b + \bar{a}\, \bar{b}\, c + b\, \bar{d} + \bar{a}\, c\, \bar{d} \tag{5.15}$$

Posledný výraz pre funkciu **f** v (5.15) predstavuje skrátenú **DNF** zadanej B-funkcie.

5.4 URČOVANIE MINIMÁLNEJ DNF ZISSOS-DUNCANOVOU METÓDOU

Určenie minimálnej disjunktívnej normálnej formy z ľubovoľného algebraického vyjadrenia B-funkcie **f** sa vykoná aplikáciou štyroch pravidiel B-algebry [6]

1. pravidla pohltenia

$$x + x\,y = x \tag{5.16}$$

2. zovšeobecneného pravidla spojovania

$$x\,y + \bar{x}\,z = x\,y + \bar{x}\,z + y\,z \tag{5.17}$$

Súčiny **xy, z** sa nazývajú **zdrojovými súčinmi** a súčin **yz redundantným (voliteľným, novým) súčinom;**

3. distributívneho pravidla

$$(x + y) \,.\, (x + z) = x + yz \tag{5.18}$$

4. modifikovaného distributívneho pravidla

$$(x + y) \,.\, (\bar{x} + z) = xz + \bar{x}\,y \tag{5.19}$$

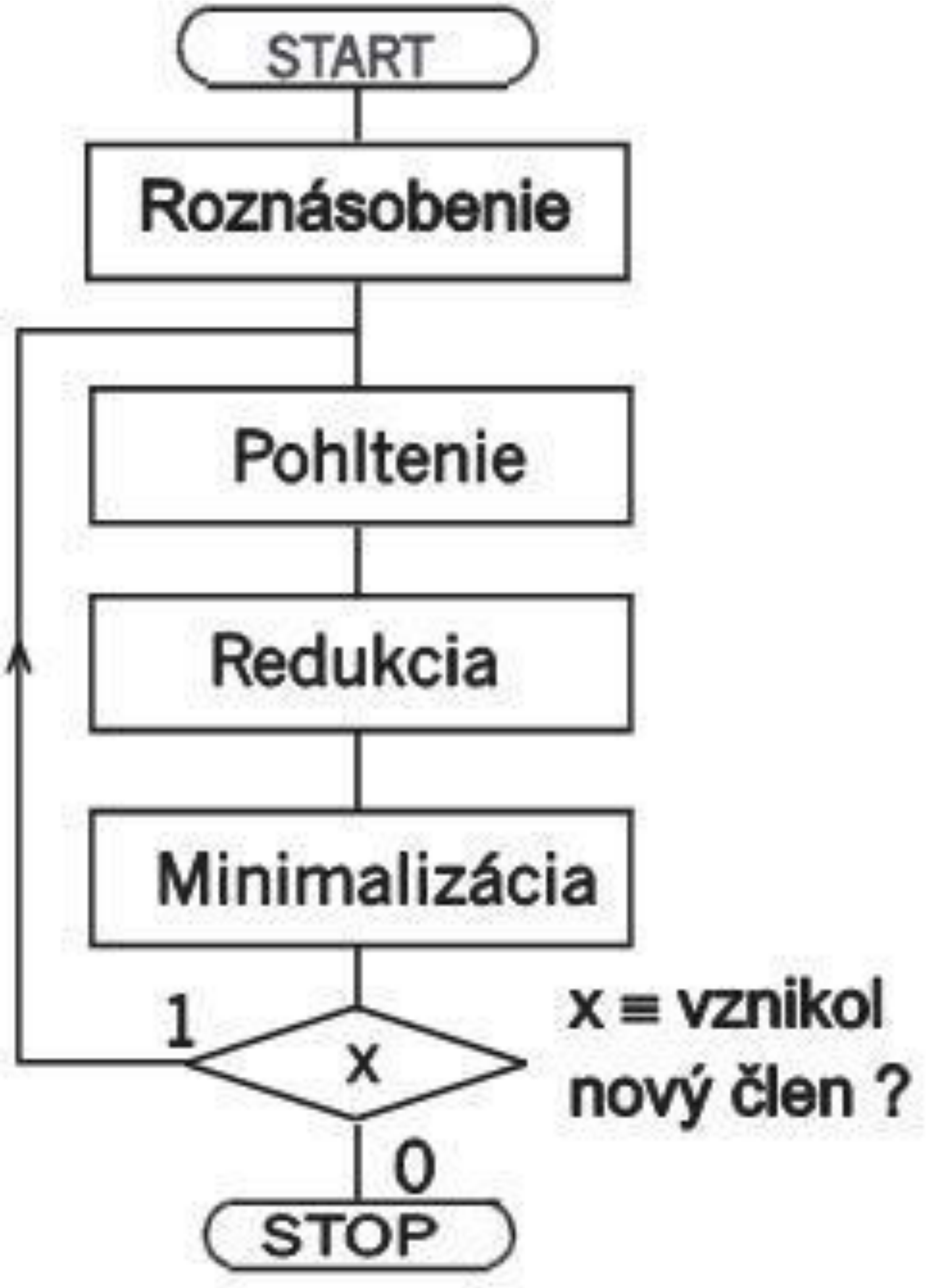
kde **x, y, z** sú ľubovoľné algebraické výrazy B-algebry.

Iredundantná DNF B-funkcie **f** zadanej ľubovoľným algebraickým vyjadrením **sa určí v troch krokoch.**

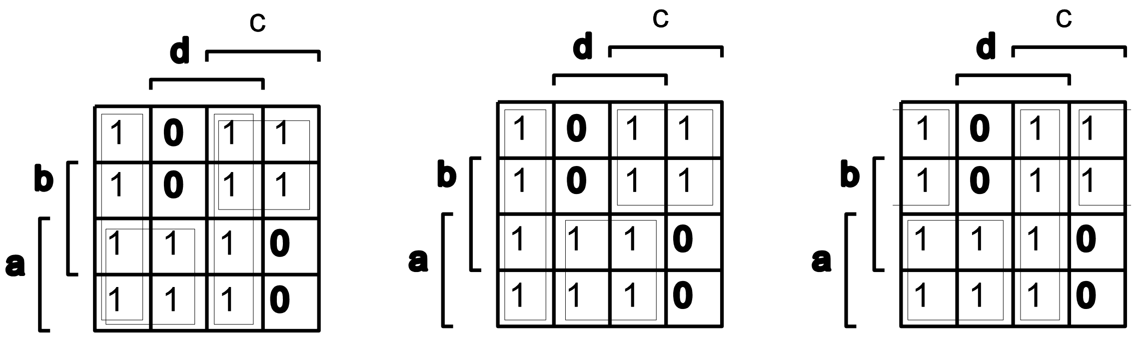
Krok 1. Roznásobenie

Krok 2. Pohltenie

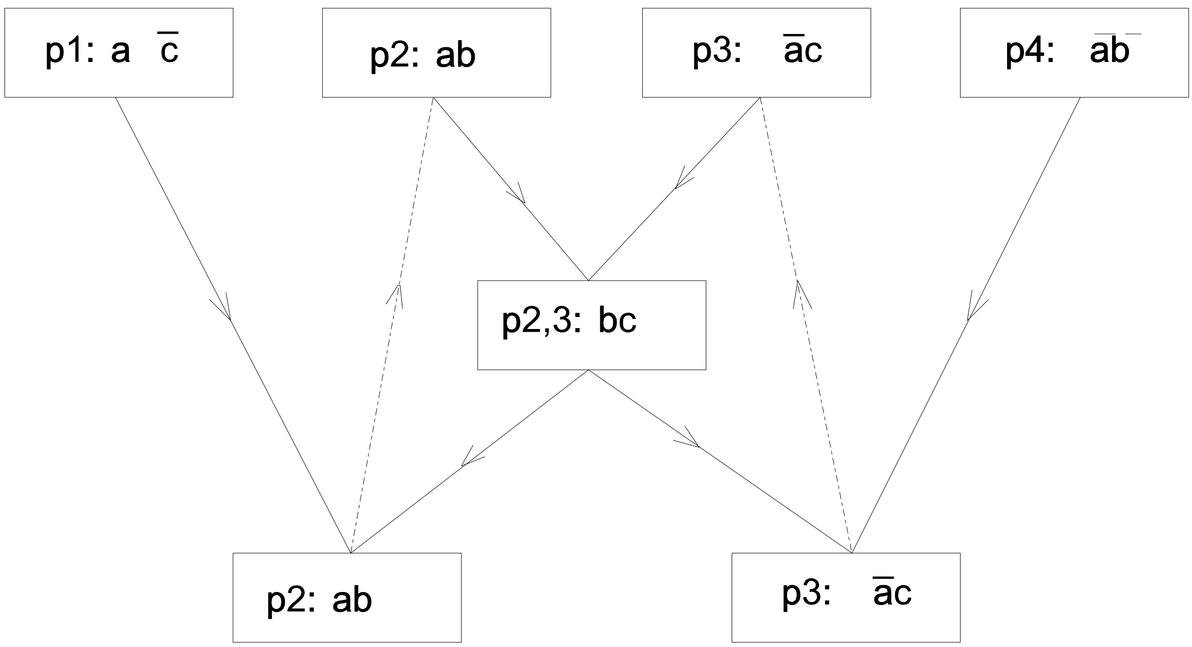
Krok 3. Redukcia



Obr. 5.1 Vývojový diagram algoritmu minimalizácie vyjadrenia B-funkcie Zissos-Duncanovou metódou



Obr. 5.2 Tri alternatívy iredundantných DNF jednej funkcie



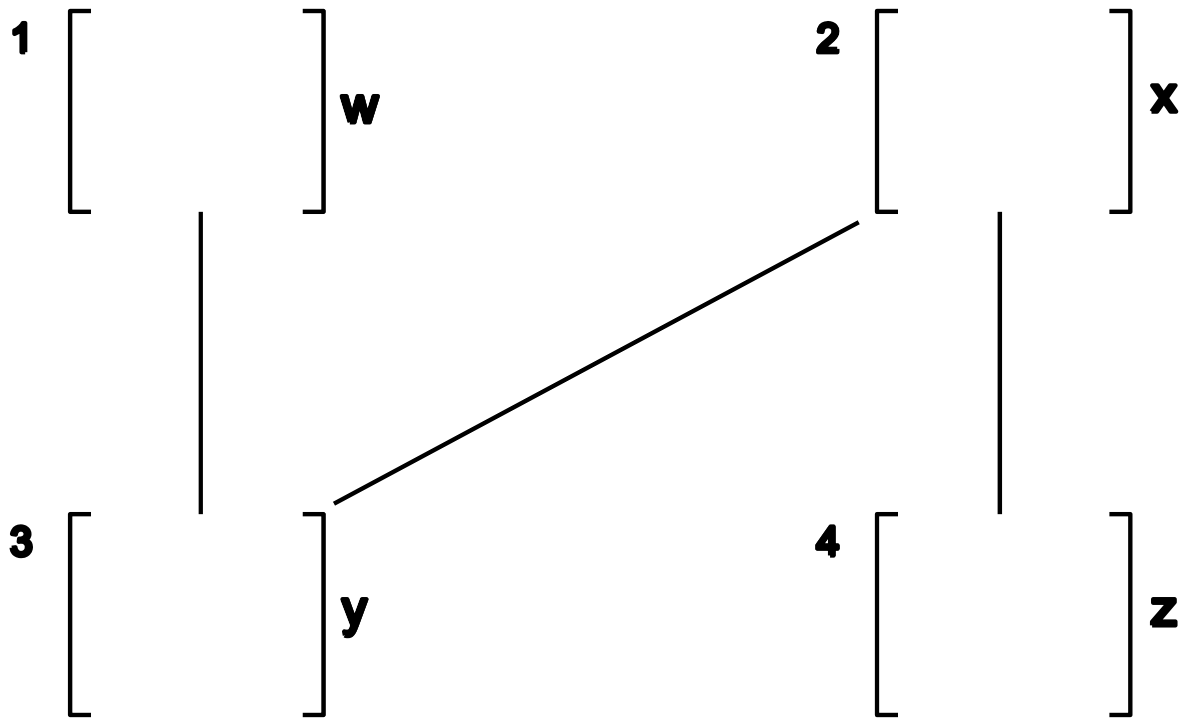
Obr. 5.3 Schéma eliminácie implikantov

Podmienky pre elimináciu.

Musí existovať skupina štyroch súčinov v ktorých,

a/ niektorá premenná, povedzme **a**, sa objavuje prinajmenšom dvakrát v jej priamej forme a prinajmenšom dvakrát v jej invertovanej forme a

b/ dve iné premenné, povedzme **b** a **c**, sú prítomne prinajmenšom raz v ich priamej forme a prinajmenšom raz v ich invertovanej forme.



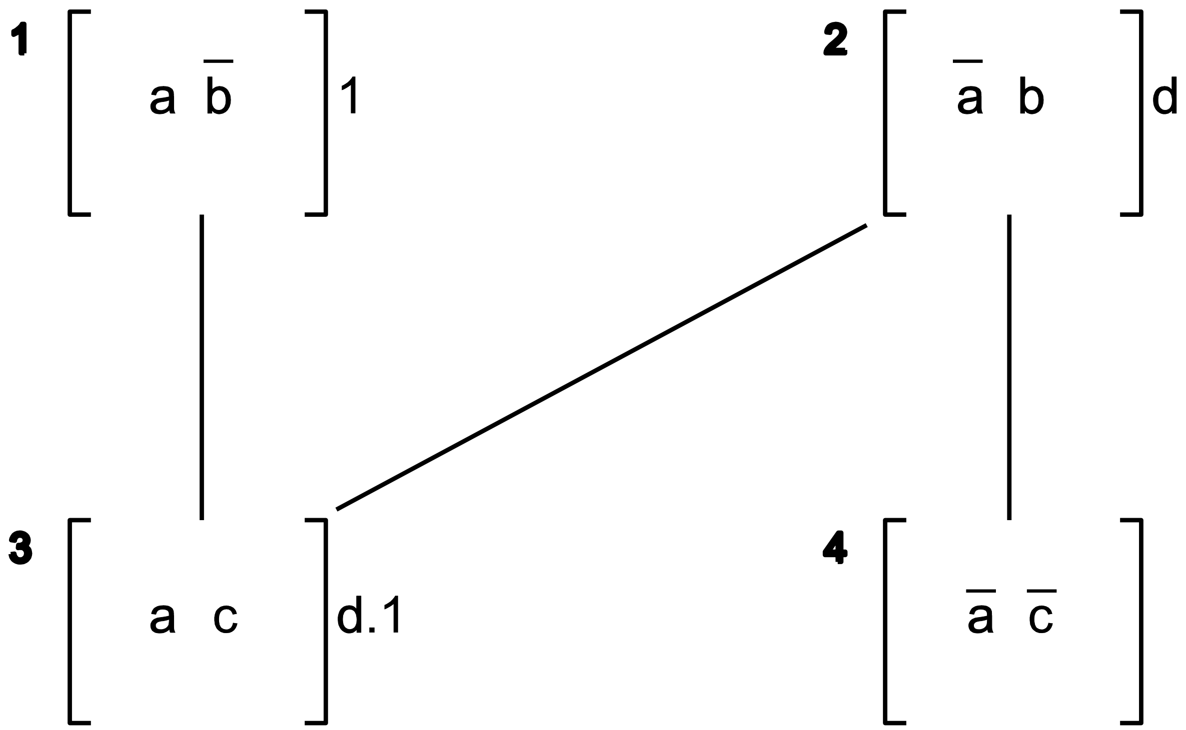
Obr. 5.4 Diagram pre kontrolu splnenia podmienky minimalizácie

Spojíme zátvorku **2** s diagonálne protiľahlou zátvorkou **3**, ak premenné mimo zátvoriek sú tie isté, alebo môžu byť upravené tak, aby sa rovnali.

Zátvorka **1** je ďalej spájaná so zátvorkou **3**, ak všetky premenné mimo zátvorky **1** sú prítomné vo výraze mimo zátvorky **3 (w je faktorom y).**

Zátvorka **2** sa spojí so zátvorkou **4** tiež iba vtedy, ak premenné mimo zátvorky **4** sú prítomné vo výraze mimo zátvorky **2**.

Ak uvedené diagonálne a vertikálne spojenie je možné, to znamená, že sú splnené podmienky pre zámenu **2** a **3** ich redundantným súčinom.



Obr. 5.5 Kontrola splnenia podmienky minimalizácie

Pre neúplne určené B-funkcie, východiskový výraz pre minimalizáciu dourčuje B-funkciu jednoznačne a ďalšia minimalizácia sa vykonáva už pre úplne určenú B-funkciu. Ak dourčenie funkcie nie je optimálne, výraz, ktorý uvedenou metódou sa získa, nemusí byť minimálnym.

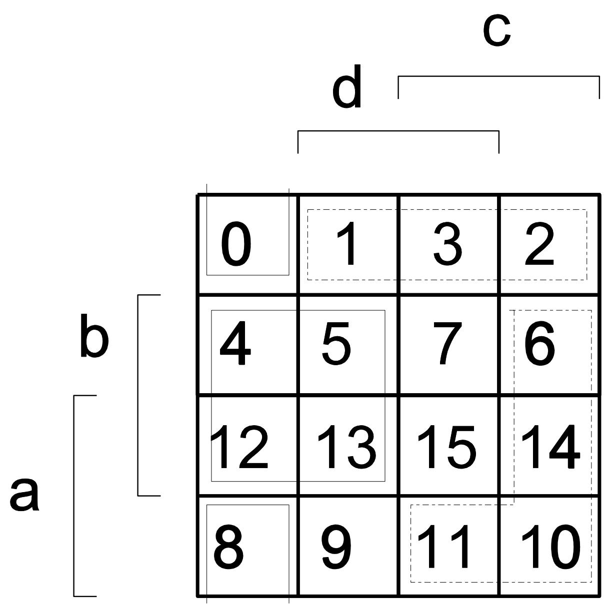
Pre tento prípad možno uvedenú metódu upraviť tak, že uvedieme vyjadrenie úplne určenej funkcie $\mathbf{f_x(x_1, x_2, ..., x_n)}$, ktorá nadobúda hodnotu **1** práve v tých bodoch z oblasti definície, v ktorých funkcia **f** nie je určená. Určí sa vyjadrenie $\mathbf{f_x}$ v tvare skrátenej **DNF.** Jednotlivé súčiny zo skrátenej **DNF** funkcie $\mathbf{f_x}$ sa využívajú v procese minimalizácie.

Hlavnou výhodou uvedenej metódy je, že sa vyjadrenie funkcie v procese minimalizácie nikdy nerozrastá (neexpanduje), ale po každom úspešnom kroku iba redukuje.

Nevýhodou uvedenej metódy je, že pri aplikácii redukcie sa musia generovať nové súčiny na ďalších úrovniach, čo tento algoritmus značne komplikuje.

5.5 MINIMALIZÁCIA VYJADRENIA B-FUNKCIE PROSTREDNÍCTVOM KARNAUGHOVYCH MÁP

Princíp minimalizácie vyjadrenia B-funkcie pomocou Karnaughových máp - aplikovanie pravidla spojovania na všetky dvojice susedných elementárnych súčinov.
Každý elementárny súčin radu **r** predstavuje v mape tzv. pravidelnú konfiguráciu $\mathbf{2^{n-r}}$ štvorčekov.
Pravidelnou konfiguráciou stupňa **k** sa nazýva konfigurácia $\mathbf{2^k}$ štvorčekov, z ktorých každý má v nej práve **k** susedov.



Obr. 5.7 Príklady pravidelných a nepravidelných konfigurácií

Pri vyjadrovaní B-funkcie v tvare skrátenej **DNF** sa vytvoria všetky pravidelné konfigurácie K_i štvorčekov, v ktorých daná funkcia nadobúda hodnotu **1** resp. nie je určená a pre ktoré platí

$$K_i \not\subset K_j \quad i, j = 1, 2, ..., p \quad i \neq j$$

kde **p** udáva počet týchto konfigurácií.

Daná B-funkcia sa rozloží na súčet **p** implikantov g_i tak, že platí

$$K_i \equiv G_{1,i} \ ,$$

kde $G_{1,i}$ je konfigurácia všetkých **"jednotkových"** štvorčekov (bodov) implikantu g_i.

Súčet všetkých prostých implikantov predstavuje SDNF. V nej môžu existovať redundantné prosté implikanty. V takomto prípade zo súboru všetkých PI vyberáme iredundantný (nenadbytočný) úplný súbor, ktorý vedie na IDNF.
Môže existovať viac alternatív IDNF – ich porovnaním nájdeme MDNF.Ak sa má získať minimálna normálna forma, musí sa získať minimálne vyjadrenie v DNF a KNF, vzájomne sa porovnajú a vyberie sa z nich tá, ktorá je podľa zadaného kritéria minimálna.

Pre B-funkciu (obr. 5.13), ktorú minimalizujeme prostredníctvom Karnaughovej mapy, dostávame

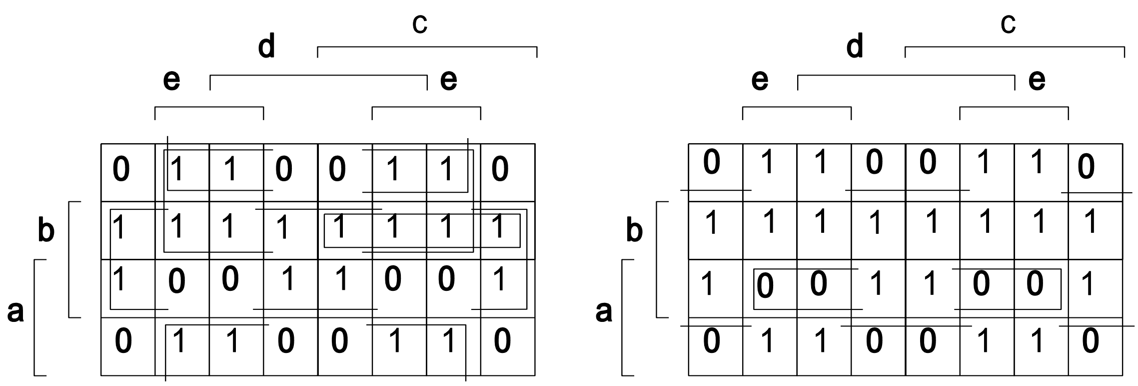
IDNF:

$$f = \bar{a}e + b\bar{e} + \bar{b}e$$

a **IKNF:**

$$f = (b + e)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{e}) \qquad (5.40)$$

Porovnávaním vyjadrení v tvare **IDNF** a **IKNF** sa zistí, že vyjadrenie **IKNF** je jednoduchším a teda predstavuje minimálnu normálnu formu.



Obr. 5.13 Minimalizácia vyjadrenia B-funkcie prostredníctvon K-mapy
(a - DNF; b - KNF)

5.6 QUINOVA - McCLUSKEYHO METÓDA MINIMALIZÁCIE

- vychádza z úplnej **DNF** a slúži pre získanie skrátenej **DNF.**

Princíp metódy - aplikovanie **modifikovaného pravidla spojovania**

$$xy + \bar{x}y = xy + \bar{x}y + y \qquad (5.41)$$

a **pravidla pohltenia**

$$y + xy = y \qquad (5.42)$$

- vyjadríme jednotlivé úplné elementárne súčiny zodpovedajúce **jednotkovým a neurčeným bodom** v binárnom tvare tak, že premenná vystupujúca priamo sa nahradí jednotkou a invertovaná premenná nulou. **Neurčené body musíme zahrnúť do procesu spájania, aby sme získali maximálne konfigurácie spájaných bodov.**
- určí sa počet jednotiek v binárnom vyjadrení elementárneho súčinu a elementárne súčiny sa rozdelia do skupín s rovnakým počtom jednotiek
- tieto skupiny sa usporiadajú vzostupne podľa počtu jednotiek a v skupine podľa vzrastajúceho indexu

- Susedné dvojice elementárnych súčinov hľadáme v susedných skupinách
- Spojené elementárne súčiny sú pohlcované výsledkom spojovania, môžu však byť spájané s ďalšími.

Výsledok spojenia sa zapíše do tabuľky a spojené elementárne súčiny sa označia "√, pretože oni už v skrátenej **DNF** nemôžu vystupovať.

Výhody Quinovej - McCluskeyho metódy:

je prehľadná a ľahko programovateľná na číslicovom počítači.

Skrátenú **DNF** predstavuje súčet tých elementárnych súčinov, ktoré neboli spájané so žiadnym iným a v tabuľke nie sú označené.

Príklad:

$$\mathbf{f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [0, 4, 9, 13, 14(12)]} \qquad (5.46)$$

Tab. 5.2 Určovanie skrátenej **DNF** funkcie (5.46)

p.j. index $x_1x_2x_3x_4$	p.j. index $x_1x_2x_3x_4$	p.j. index $x_1x_2x_3x_4$
1 1 0 0 0 1 √	1 1,3 0 0 - 1 √	1 1,3,5,7 0 - - 1
2 0 0 1 0 √	1,5 0 - 0 1 √	2,3,6,7 0 - 1 -
8 1 0 0 0 √	2,3 0 0 1 - √	2,3,10,11 - 0 1 -
----------------------	2,6 0 - 1 0 √	----------------------
2 3 0 0 1 1 √	2,10 - 0 1 0 √	2 3,7,11,15 - - 1 1
5 0 1 0 1 √	8,10 1 0 - 0	
6 0 1 1 0 √	8,12 1 - 0 0	
10 1 0 1 0 √	----------------------	
12 1 1 0 0 √	2 3,7 0 - 1 1 √	
----------------------	3,11 - 0 1 1 √	
3 7 0 1 1 1 √	5,7 0 1 - 1 √	
11 1 0 1 1 √	6,7 0 1 1 - √	
----------------------	10,11 1 0 1 - √	
4 15 1 1 1 1 √	----------------------	
=================	7,15 - 1 1 1 √	
	11,15 1 - 1 1 √	

SDNF:

$$\mathbf{f = x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_4 + \overline{x}_1x_3 + \overline{x}_2x_3 + x_3x_4}$$

Skrátená **KNF** B-funkcie sa určí prostredníctvom **DNF** funkcie

$$\overline{f}\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{0, 4, 9, 13, 14, (12)\},$$

Tab.5.3 Určovanie skrátenej **KNF** B-funkcie

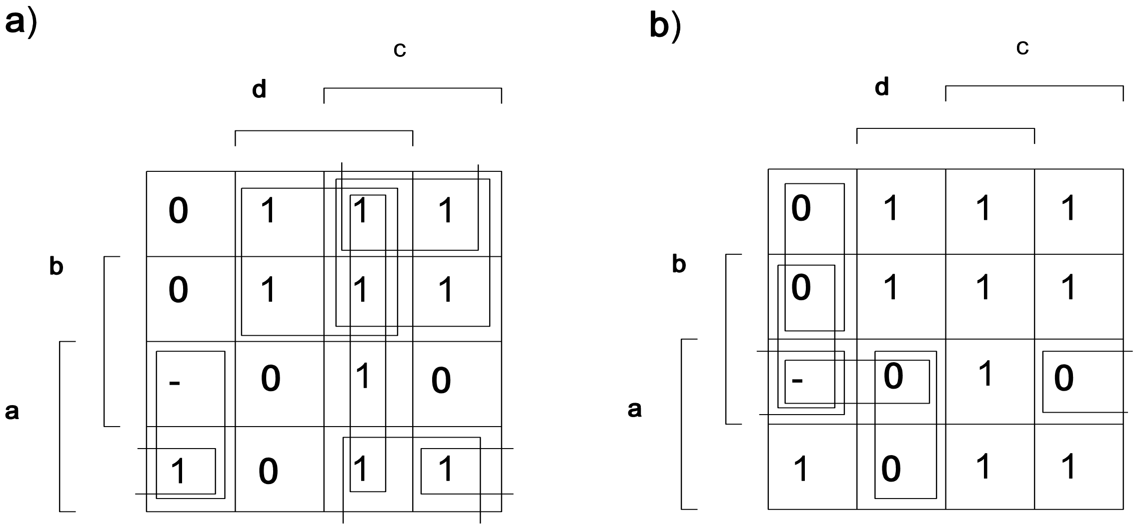
p.j.	index	$x_1x_2x_3x_4$	p.j.	index	$x_1x_2x_3x_4$
0	0	0 0 0 0 √	0	0,4	0 - 0 0
1	4	0 1 0 0 √	1	4,12	- 1 0 0
2	9	1 0 0 1 √	2	9,13	1 - 0 1
	12	1 1 0 0 √		12,13	1 1 0 -
				12,14	1 1 - 0
3	13	1 1 0 1 √			
	14	1 1 1 0 √			

Skrátená **DNF** funkcie $\overline{f}$ je daná v tvare

$$\overline{f} = \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_4 \qquad (5.48)$$

Skrátená **KNF** funkcie f je daná v tvare

$$f = (x_1 + x_3 + x_4) + (\overline{x}_2 + x_3 + x_4) + (\overline{x}_1 + x_3 + \overline{x}_4) + (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3) + (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_4) \qquad (5.49)$$



Obr. 5.15 Kontrola správnosti určenia prostých implikantov (a) a prostých implicentov (b) v Karnaughovej mape

5.7 URČOVANIE IREDUNDANTNÝCH NORMÁLNYCH FORIEM

Mriežka prostých implikantov (MPI)

- vodorovne sa vypíšu stavové indexy všetkých bodov z množiny F_1 **Body z množiny F_X do mriežky sa nevpisujú!**

- zvisle sa vypíšu všetky prosté implikanty.

Priesečníky prostého implikantu „**i**“ s tými bodmi „**j**“, ktoré daný prostý implikant pokrýva, sa označia krížikmi.

Mriežku prostých implikantov môžeme interpretovať ako **maticu pokrytia P**, ktorej prvky p_{ij} **= 1** práve vtedy, keď prostý implikant I_i **(i = 1, 2, ..., m)** pokrýva jednotkový bod B_j **(j = 1, 2, ..., k), m** - počet PI**, k** - počet jednotkových bodov**.**

Prosté implikanty		Jednotkové body									
		1	2	3	5	6	7	8	10	11	15
A_1	$a\bar{b}\bar{d}$							X	X		
A_2	$a\bar{c}\bar{d}$							X			
A_3	$\bar{a}d$	X		X	X		X				
A_4	$\bar{a}c$		X	X		X	X				
A_5	$\bar{b}d$		X	X					X	X	
A_6	cd			X			X			X	X

Obr. 5.16 Mriežka prostých implikantov

Petrickova metóda určovania IDNF

Označia sa všetky prosté implikanty v **MPI** písmenami A_1**,** A_2**,** A_3 atď. Tieto písmená sa považujú za dvojhodnotové premenné, ktorých hodnota je rovná **1**, ak príslušný implikant sa vyberie do systému prostých implikantov.

Definujeme funkciu pokrytia **Φ**, ktorá nadobúda hodnotu **1** práve vtedy, ak všetky primárne implikanty sú pokryté aspoň jedným z vybraných prostých implikantov.

Funkcia pokrytia **Φ** bude daná v tvare

$$\Phi = A_3 \,.\, (A_4 + A_5) \,.\, (A_3 + A_4 + A_5 + A_6) \ldots$$

Využívajúc maticu pokrytia môžeme funkciu pokrytia definovať vzťahom

$$\phi = \prod_{j=1}^{k} \bigvee_{i=1}^{m} p_{ij} \cdot A_i \tag{5.50}$$

roznásobením sa získa skrátená DNF funkcie **Φ**.

Funkcia **Φ** je rovná **1**, ak aspoň jeden elementárny súčin je rovný **1**. Jednotlivé elementárne súčiny skrátenej DNF predstavujú prosté implikanty a teda nie je možné z nich vypustiť žiadne písmeno. Preto súbor prostých implikantov, zodpovedajúcich písmenám jedného elementárneho súčinu v skrátenej DNF predstavuje minimálny úplný súbor prostých implikantov a ich logický súčet tvorí iredundantnú DNF funkcie f.

Pre mriežku prostých implikantov (obr. 5.16) funkcia pokrytia je v tvare

$$\Phi = A_3.(A_4 + A_5).(A_3 + A_4 + A_5 + A_6).A_3.A_4.(A_3 + A_4 + A_6).(A_1 + A_2).(A_1 + A_5).$$
$$.(A_5 + A_6).A_6 \tag{5.51}$$

$$\Phi = A_1A_3A_4A_6 + A_2A_3A_4A_5A_6 \,. \tag{5.52}$$

To znamená, že funkcia (5.46) má dve iredundantné DNF:

$$f = x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_4 + \bar{x}_1x_3 + x_3x_4 \tag{5.53}$$

$$f = x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_4 + \bar{x}_1x_3 + \bar{x}_2x_3 + x_3x_4 \tag{5.54}$$

Quine - McCluskey algoritmus určovania IDNF

Implikant $\mathbf{I_v}$ je podstatný, ak v MPI existuje taký bod $\mathbf{B_u}$, že $\mathbf{p_{vu} = 1}$ a $\mathbf{p_{iu} = 0}\ \forall\ \mathbf{i \neq v}$. Riadok (stĺpec) **u** pokrýva riadok (stĺpec) **v**, ak $\mathbf{p_{uj}.p_{vj} = p_{vj}},\ \forall\ \mathbf{j}\ (\mathbf{p_{iu}.p_{iv} = p_{iv}},\ \forall\ \mathbf{i})$.

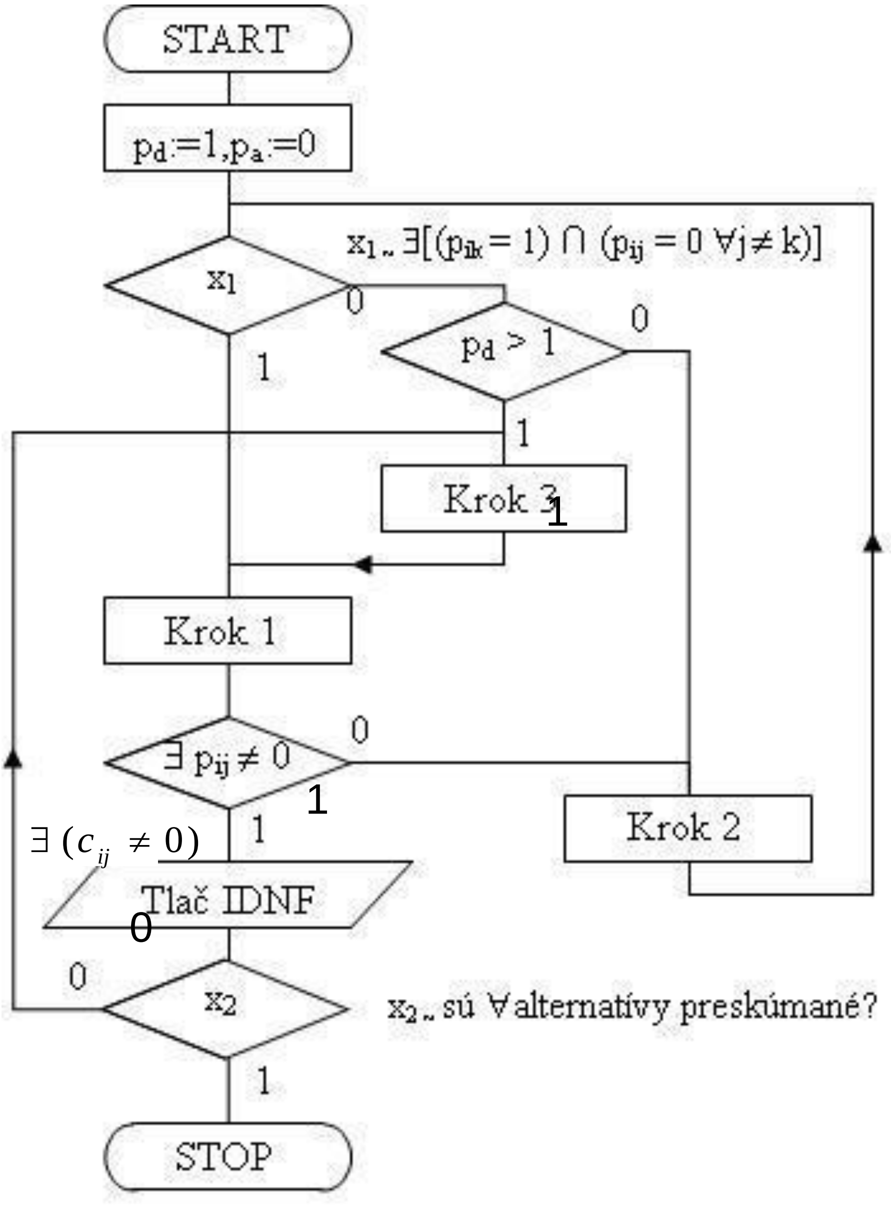
Výber prostých implikantov z mriežky pozostáva z nasledovných krokov.

Krok 1: Vyberie sa každý podstatný implikant $\mathbf{I_p}$, označí sa $\mathbf{p_d + p_a}$ hviezdičkami, pričom $\mathbf{p_d = 1}$, ak výberu nepredchádzal krok **2**, v opačnom prípade $\mathbf{p_d = 2}$ a $\mathbf{p_a}$ udáva počet aplikácií kroku **3**. Preškrtnú sa stĺpce, v ktorých má implikant $\mathbf{I_p}$ krížiky. Ak sú všetky stĺpce preškrtnuté, je výber prostých implikantov pre jednu alternatívu IDNF ukončený, ináč sa prejde ku kroku **2**.

Krok 2: Vyškrtne sa každý riadok prislúchajúci prostému implikantu $\mathbf{I_u}$ rádu **r**, ktorý je pokrytý iným prostým implikantom rádu $\mathbf{r_1 \leq r}$. Súčasne môžeme vyškrtnúť každý stĺpec, ktorý pokrýva niektorý iný stĺpec. Ak v MPI existuje podstatný implikant, prejdeme späť ku kroku **1**, inak ku kroku **3**.

Krok 3: Vyberie sa stĺpec s minimálnym počtom krížikov, zakrúžkuje sa v ňom náhodne jeden, ostatné sa preškrtnú a v tejto alternatíve neuvažujú (po ukončení výberu pre danú alternatívu postupne sa zakrúžkujú ďalšie krížiky). Prejde sa ku kroku **1**.

Pre potreby programového spracovania je vhodnejšie formalizované vyjadrenie algoritmu (obr. 5.17).



Obr. 5.17 Vývojový diagram Quinovho - Mc Cluskeyho algoritmu určovania IDNF

Krok 1: Na začiatku priradíme $\mathbf{p_d = 1}$ a $\mathbf{p_a = 0}$. Vyberie sa každý podstatný implikant $\mathbf{I_p}$ a priradí sa mu index $\mathbf{p_d + p_a}$. Určia sa nové hodnoty $\mathbf{p_{ij}}$ podľa vzťahu $\mathbf{p_{ij} = {}_{pj} \,.\, p_{ij}}$, $\forall$ **i,j**. Ak platí $\mathbf{p_{ij} = 0}$ $\forall$ **i,j** , je výber prostých implikantov pre jednu alternatívu IDNF ukončený, inak sa prejde ku kroku **2**.

Krok 2: Priradíme $\mathbf{p_d = 2}$. Ak $\exists$ $\mathbf{I_u}$ rádu $\mathbf{r}$ a $\mathbf{I_v}$ rádu $\mathbf{r_1}$ také, že $\mathbf{I_u \le I_v}$ a $\mathbf{r_1 \le r}$, potom položíme $\mathbf{p_{uj} = 0}$, $\forall$ $\mathbf{j}$. Ak stĺpce $\mathbf{S_u}$ a $\mathbf{S_v}$ sú také, že $\mathbf{S_u \le S_v}$, potom položíme $\mathbf{p_{iv} = 0}$, $\forall$ $\mathbf{i}$. Ak v MPI existuje podstatný implikant prejdeme späť ku kroku **1**, inak ku kroku **3**.

Krok 3: Vyberieme stĺpec $\mathbf{S_v} \mid \Sigma\, \mathbf{p_{iv} = min}$. Zvolíme $\mathbf{k} \mid$ $\mathbf{p_{kv} = 1}$ a položíme $\mathbf{p_{iv} = 0}$, $\forall$ $\mathbf{i \ne k}$. Priradíme $\mathbf{p_a = p_a + 1}$. Prejdeme späť ku kroku **1**.

Prosté implikanty označené jednou hviezdičkou vystupujú v každej IDNF, implikanty označené dvoma hviezdičkami vystupujú v každej MDNF a implikanty označené viac ako dvoma hviezdičkami vystupujú aspoň v jednej IDNF.

Hore uvedený postup si ozrejmíme na príklade určenia minimálnej DNF B-funkcie

$$\mathbf{f(a,b,c,d) = [3, 5, 8, 9, 14\ (13)]}\ . \qquad (5.55)$$

Skrátená DNF zadanej B-funkcie sa určí Quinovou - McCluskeyho metódou.

$$\mathbf{f = \bar a\,\bar b\,\bar c + \bar b\, c\,\bar d + b\,\bar c\,\bar d + \bar a\, b\, c + a\,\bar b\, c + a\, b\,\bar c + b\, c\, d + a\, c\, d + a\, b\, d + \bar a\,\bar d}$$

Pre výber prostých implikantov tvoriacich minimálnu DNF sa zostaví mriežka prostých implikantov (obr. 5.18).

Prosté implikanty	Jednotkové body										
	0	1	2	4	6	7	10	11	12	15	
$\bar a\,\bar b\,\bar c$ *	X	X									1
$\bar b\, c\,\bar d$			X				X				
$b\,\bar c\,\bar d$ **				X					X		3
$\bar a\, b\, c$					X	X					
$a\,\bar b\, c$							X	X			
$a\, b\,\bar c$									X		2
$b\, c\, d$						X				X	
$a\, c\, d$								X		X	
$a\, b\, d$										X	2
$\bar a\,\bar d$	X		X	X	X						
	1	1		3					3		

Obr.5.18 Mriežka prostých implikantov funkcie (5.55)

Prosté implikanty	Jednotkové body										
	0	1	2	4	6	7	10	11	12	15	
$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ *	X	X									1
$\bar{b}\,c\,\bar{d}$			X				X				5
$b\,\bar{c}\,\bar{d}$ **				X					X		3
$\bar{a}\,b\,c$					X	X					5
$a\,\bar{b}\,c$ ***							X	X			6
$a\,b\,\bar{c}$									X		2
$b\,c\,d$ ***						X				X	6
$a\,c\,d$								X		X	
$a\,b\,d$										X	2
$\bar{a}\,\bar{d}$ ***	X		X	X	X						4
	1	1	4	3	4	6	6	6	3	6	

Obr. 5.19 Výber prvej alternatívy IDNF

Jedna iredundantná DNF zadanej B-funkcie je

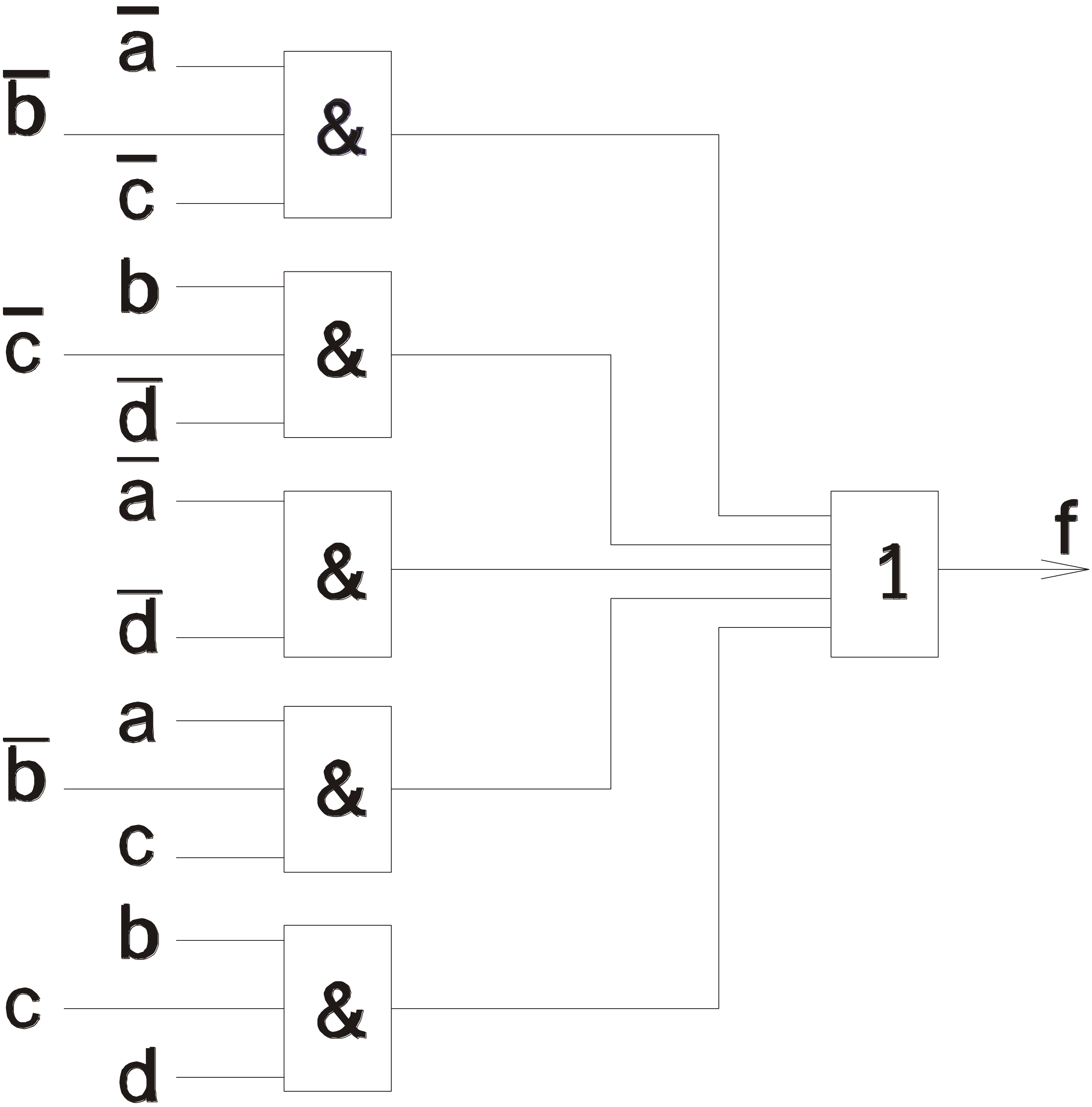
$$f = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + b\,\bar{c}\,\bar{d} + a\,\bar{b}\,c + b\,c\,d + \bar{a}\,\bar{d} \qquad (5.57)$$

Prosté implikanty	Jednotkové body										
	0	1	2	4	6	7	10	11	12	15	
$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ *	X	X									1
$\bar{b}\,c\,\bar{d}$ * * * *			X				X				5,7
$b\,\bar{c}\,\bar{d}$ * *				X					X		3
$\bar{a}\,b\,c$					X	X					5,11
$a\,\bar{b}\,c$ * * *							X	X			6,8
$a\,b\,\bar{c}$									X		2
$b\,c\,d$ * * *						X				X	6,10
$a\,c\,d$ * * * *								X		X	9
$a\,b\,d$										X	2
$\bar{a}\,\bar{d}$ * * *	X		X	X	X						4
	1	1	4,7	3	4,11	6,11	6,7	6,7	3	6,9	

Obr. 5.20 Výber druhej alternatívy IDNF

Druhá alternatíva IDNF zadanej B -funkcie je

$$f = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + \bar{b}\,c\,\bar{d} + b\,\bar{c}\,\bar{d} + \bar{a}\,b\,c + a\,c\,d \qquad (5.58)$$

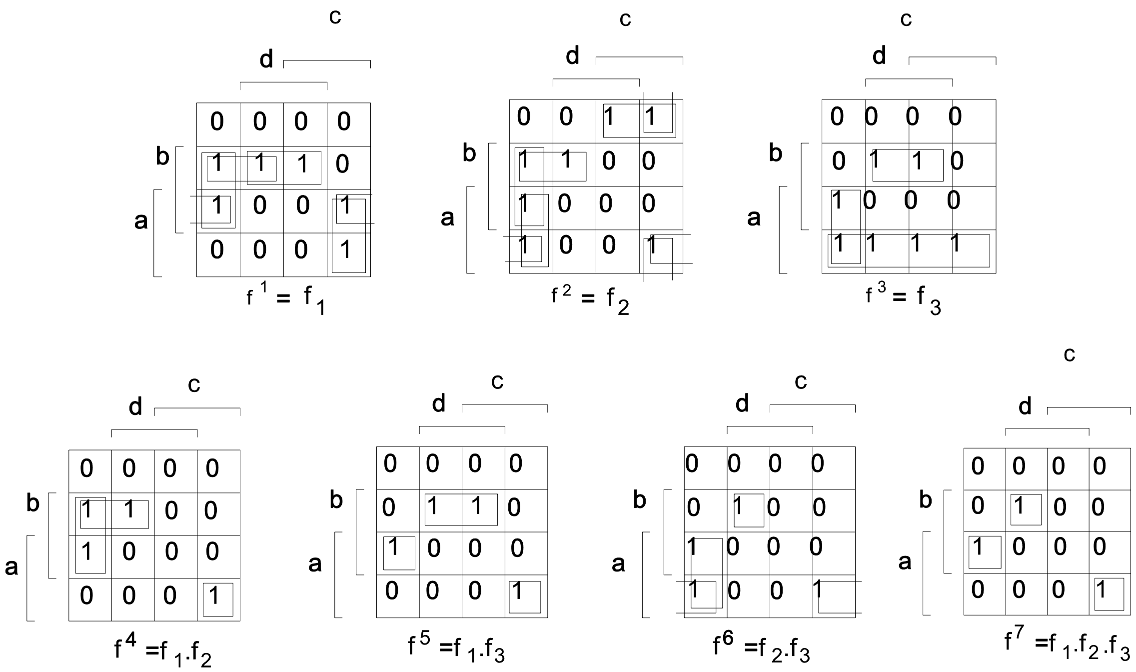


Obr.5.2 Štruktúrna schéma B-funkcie (5.57)

Určovanie všetkých alternatív minimálnych DNF sa môže vykonať kombináciou Q-M metódy riešenia MPI a Petrickovej metódy tak, že pomocou kroku **1** a **2** Q-M metódy zjednoduší sa MPI a na zjednodušenú mriežku sa aplikuje Petrickova metóda.

Minimalizácie vyjadrenia skupiny funkcií

Skupinové prosté implikanty sa určia ako prosté implikanty funkcií $\mathbf{f}^j$, ktoré sú zapísané v mapách (obr. 5.23). Prosté implikanty sa určia priamo v mapách.



Obr. 5.23 Karnaughove mapy pre určenie skupinových prostých implikantov

Získa sa takto nasledovný súbor skupinových prostých implikantov

$\mathbf{f^7 = f_1 \,.\, f_2 \,.\, f_3 : \bar{a}\, b\, \bar{c}\, d,\; a\, b\, \bar{c}\, \bar{d},\; a\, \bar{b}\, c\, \bar{d}}$

$\mathbf{f^6 = f_2 \,.\, f_3 : a\, \bar{c}\, \bar{d},\; a\, \bar{b}\, \bar{d}}$

$\mathbf{f^5 = f_1 \,.\, f_3 : \bar{a}\, b\, d}$

$\mathbf{f^4 = f_1 \,.\, f_2 : \bar{a}\, b\, \bar{c},\; b\, \bar{c}\, \bar{d}}$

$\mathbf{f^3 = f_3 : a\, \bar{b}}$

$\mathbf{f^2 = f_2 : \bar{a}\, \bar{b}\, c,\; \bar{b}\, c\, \bar{d}}$

$\mathbf{f^1 = f_1 : a\, c\, \bar{d},\; a\, b\, \bar{d}}$

Určovanie skupinových prostých implikantov upraveným Quine-McCluskyho algoritmom

Určí sa:

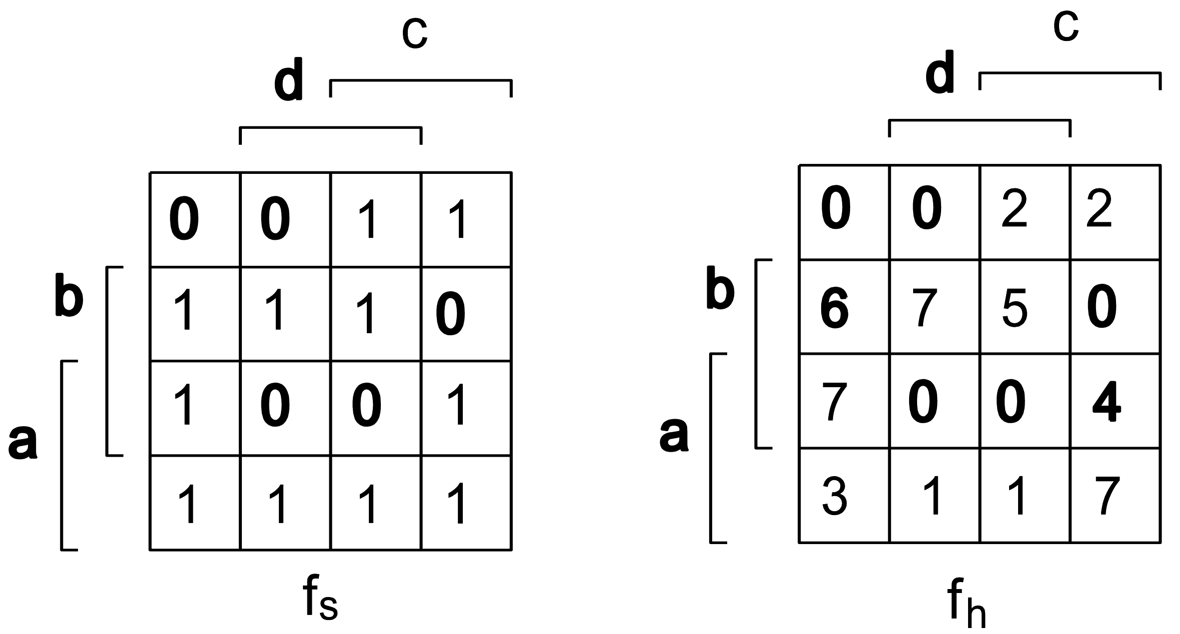
"skupinová" funkcia

$$\mathbf{f_s(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{p} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (5.63)$$

a jej zodpovedajúca **hodnotiaca funkcia**

$$\mathbf{f_h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,.\, 2^{p-i}} \qquad ($$

kde $\mathbf{f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ je boolovska funkcia premenných $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ nadobúdajúca hodnotu **0** v tých bodoch z oblasti definície, v ktorých všetky funkcie $\mathbf{f_i}$ nadobúdajú hodnotu **0**, a v ostatných bodoch nadobúdajú hodnotu **1**;



Obr. 5.24 Zápis skupinovej a hodnotiacej funkcie
do Karnaughovej mapy

Spájať sa môžu dva susedné implikanty **I_1, I_2** funkcie **f_s**, ak im zodpovedajúce hodnoty **h_1, h_2** hodnotiacej funkcie **f_h** splňujú podmienku

LAND (h_1, h_2) $\neq$ 0 (5.65)

kde **LAND (h_1, h_2)** predstavuje logický súčin rádov binárne vyjadrených hodnôt **h_1, h_2**. Ak pritom

LAND (h_1, h_2) = h_1 (5.66) resp. **LAND (h_1, h_2) = h_2** (5.67)

potom implikant **I_1** resp. implikant **I_2** nemôže byt skupinovým prostým implikantom.

Dostávame nasledovnú tabuľku

p .j.	index	premenné a b c d	f_h f_1 f_2 f_3
1	2	0 0 1 0	0 1 0 √
	4	0 1 0 0	1 1 0 √
	8	1 0 0 0	0 1 1 √
2	3	0 0 1 1	0 1 0 √
	5	0 1 0 1	1 1 1
	9	1 0 0 1	0 0 1 √
	10	1 0 1 0	1 1 1
	12	1 1 0 0	1 1 1
3	7	0 1 1 1	1 0 1 √
	11	1 0 1 1	0 0 1 √
	14	1 1 1 0	1 0 0 √
1	2,3	0 0 1 -	0 1 0
	2,10	- 0 1 0	0 1 0
	4,5	0 1 0 -	1 1 0
	4,12	- 1 0 0	1 1 0
	8,9	1 0 0 -	0 0 1√
	8,10	1 0 - 0	0 1 1
	8,12	1 - 0 0	0 1 1
2	5,7	0 1 - 1	1 0 1
	9,11	1 0 - 1	0 0 1√
	10,11	1 0 1 -	0 0 1√
	10,14	1 - 1 0	1 0 0
	12,14	1 1 - 0	1 0 0
1	8,9,10,11	1 0 - -	0 0 1

SPI	f_1						f_2							f_3							
	4	5	7	10	12	14	2	3	4	5	8	10	12	5	7	8	9	10	11	12	
f_{123} $\bar{a}\,b\,\bar{c}$		X								X				X							2
$a\,\bar{b}\,c\,\bar{d}$				X								X						X			5
**** $a\,b\,\bar{c}\,\bar{d}$					X								X							X	7
f_{23} *** $a\,\bar{b}\,\bar{d}$											X	X				X		X			6
***** $a\,\bar{c}\,\bar{d}$											X		X			X				X	8
f_{13} * $\bar{a}\,b\,d$		X	X											X	X						1
f_{12} ** $\bar{a}\,b\,\bar{c}$	X	X							X	X											3
***** $b\,\bar{c}\,\bar{d}$	X				X				X				X								8
f_3 * $a\,\bar{b}$																X	X	X	X		1
f_2 * $\bar{a}\,\bar{b}\,c$							X	X													1
$\bar{b}\,c\,d$							X					X									2
f_1 *** $a\,c\,d$				X		X															4
$a\,b\,\bar{d}$					X	X															5
	3	1	1	4	7,8	4	1	1	3	3	6	6	7,8	1	1	1	1	1	1	7,8	

Dostali sme päť iredundantných systémov skupinových prostých implikantov:

1. systém: $\bar{a}bd,\ a\bar{b},\ \bar{a}\bar{b}c,\ \bar{a}b\bar{c},\ a\bar{b}\bar{d},\ ac\bar{d},\ ab\bar{c}\bar{d}$

2. systém: $\bar{a}bd,\ a\bar{b},\ \bar{a}\bar{b}c,\ \bar{a}b\bar{c},\ a\bar{b}\bar{d},\ ac\bar{d},\ a\bar{c}\bar{d},\ b\bar{c}\bar{d}$

3. systém: $\bar{a}bd,\ a\bar{b},\ \bar{a}\bar{b}c,\ \bar{a}b\bar{c},\ ab\bar{d},\ a\bar{c}\bar{d},\ a\bar{b}c\bar{d}$

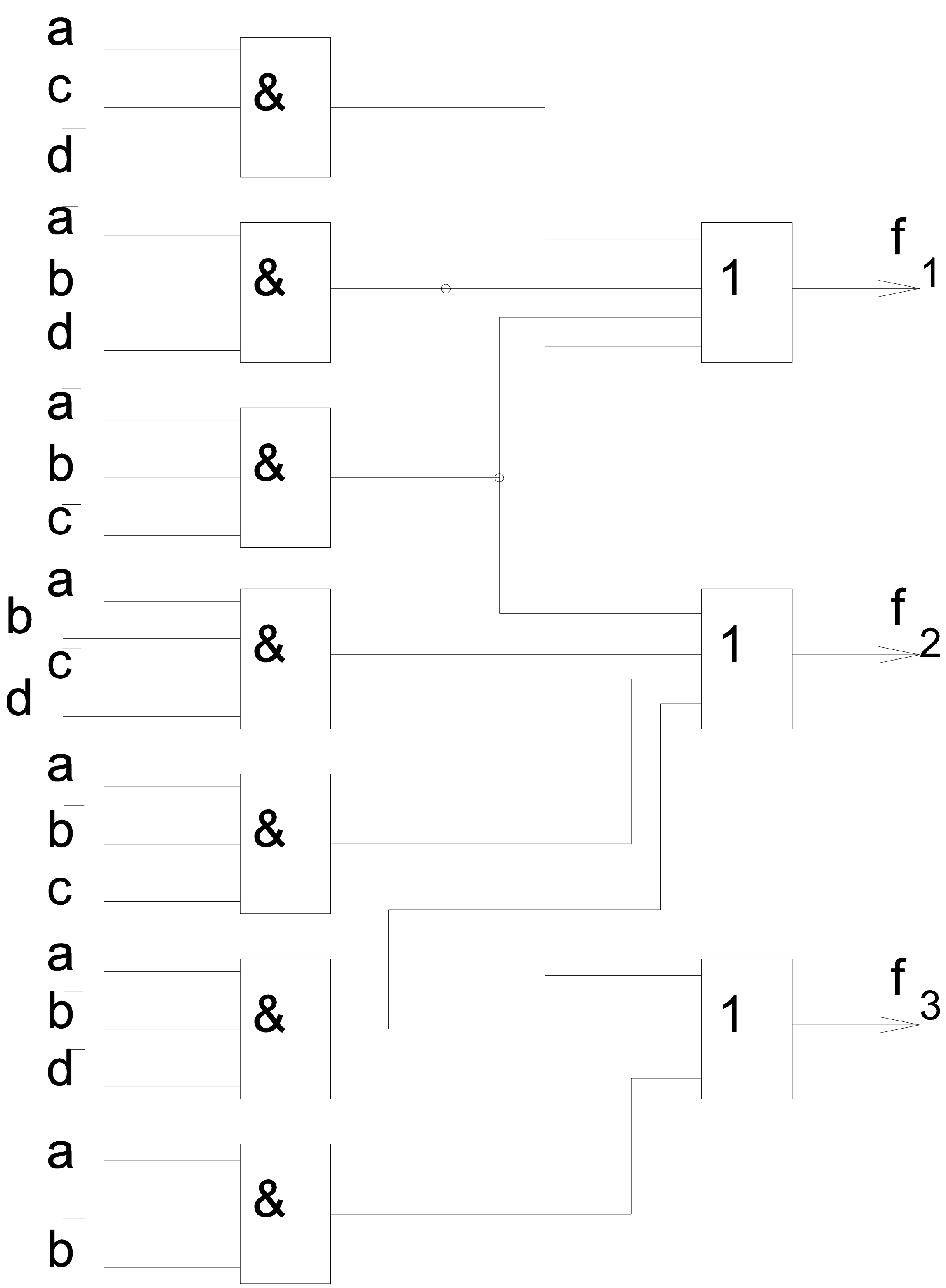
4. systém: $\bar{a}bd,\ a\bar{b},\ \bar{a}\bar{b}c,\ \bar{a}b\bar{c},\ ab\bar{d},\ a\bar{c}\bar{d},\ ac\bar{d},\ a\bar{b}\bar{d}$

5. systém: $\bar{a}bd,\ a\bar{b},\ \bar{a}\bar{b}c,\ \bar{a}b\bar{c},\ ab\bar{d},\ a\bar{c}\bar{d},\ ac\bar{d},\ \bar{b}c\bar{d}$

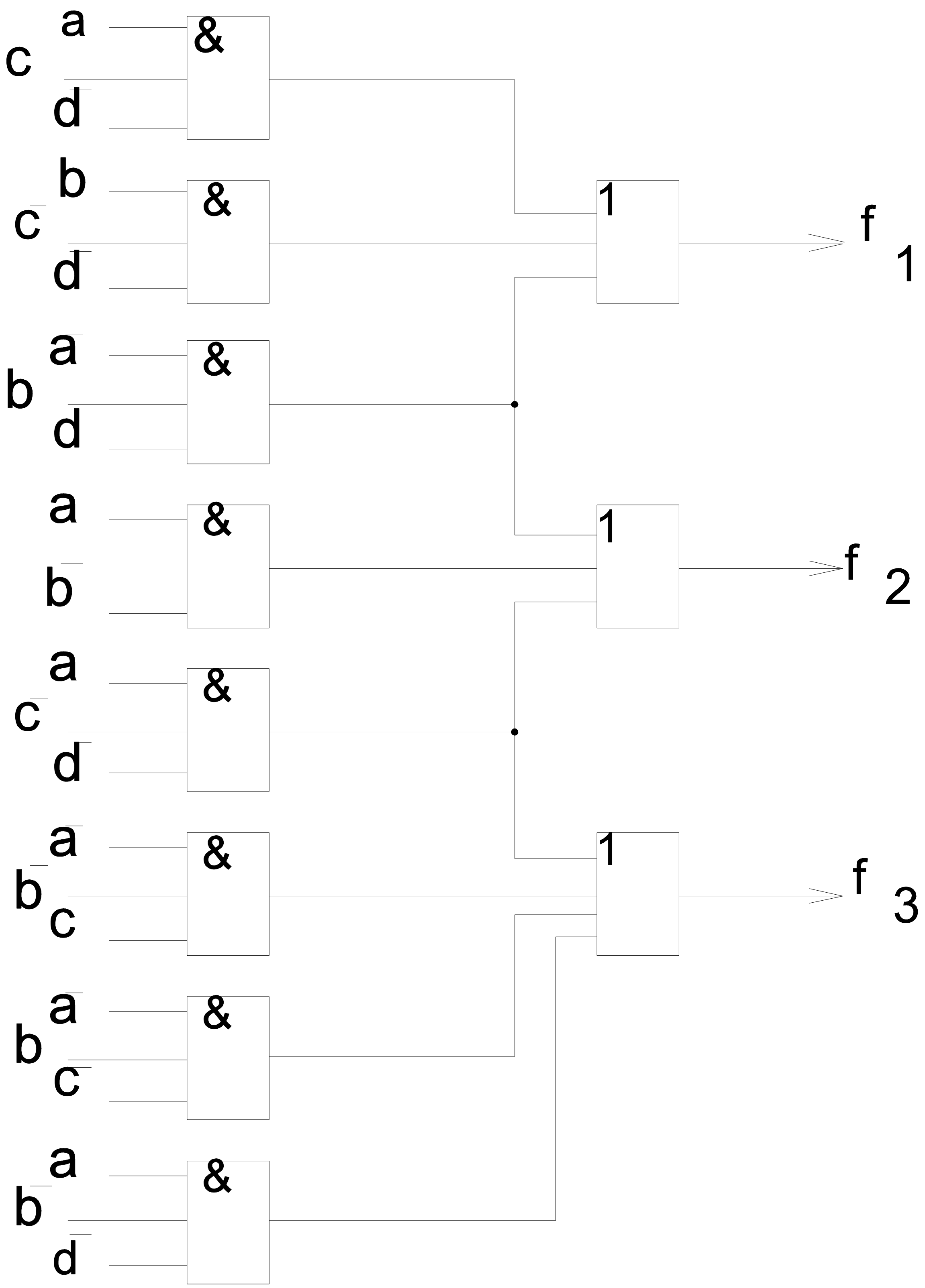
Vyjadrenie jednotlivých funkcií $\mathbf{f_i}$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}bd + \bar{a}b\bar{c} + ac\bar{d} \\
f2 &= ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c \\
f_3 &= ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{d} + \bar{a}bd + a\bar{b}
\end{aligned}
\tag{5.70}
$$

Vyjadrenie jednotlivých funkcií môže byť redundantné. Tak napr. vo funkcii f_3 redundantným je skupinový prostý implikant $\mathbf{a\bar{b}\bar{d}}$, ktorý môže byť pohltený implikantom $\mathbf{a\bar{b}}$. V zložitejších prípadoch pre jednotlivé funkcie je potrebné zostaviť osobitné MPI a zistiť, či ich vyjadrenia sú iredundantné.



Obr.5.3 Štruktúrna schéma skupiny B-funkcií minimalizovaných spoločne (32 vstupov)



Obr.5.4 Štruktúrna schéma skupiny B-funkcií minimalizovaných jednotlivo (33 vstupov)