7.2 POKRYTIE A EKVIVALENCIA AUTOMATOV.

- úloha zostrojiť ekvivalentný automat, ktorý vykonáva tú istú vstupno-výstupnú závislosť s menším prípadne najmenším počtom vnútorných stavov

Tab. 7.12. Tabuľka prechodov a výstupov neúplne určeného automatu

X(t) / S(t)	A	B	C	D	A	B	C	D
1	2	-	3	2	0	1	-	0
2	3	5	2	-	0	1	0	-
3	3	4	-	5	0	1	-	0
4	-	1	2	-	-	1	-	-
5	-	-	1	-	-	-	1	-

S(t+1) Y(t)

Nech **A = (X, S, Y, δ, λ)** a **A' = (X, S', Y, δ', λ')** sú dva neúplne určené automaty. Bude sa hovoriť, že **stav $S_i \in S$ pokrýva stav $S_j \in S'$**, čo bude značiť $S_i \geq S_j$, vtedy a len vtedy, ak pre každé prípustné slovo **U** pre **A** a **A'** zo stavu S_i a S_j platí:

$$\lambda(S_i, U) = \lambda'(S_j, U)$$

vždy vtedy, ak výstupná funkcia automatu **A'**, t.j. funkcia **λ'**, je definovaná.

vstupné slovo **U** generuje v automate **A'** zo stavu S_j výstupné slovo $0-1--0$

vstupné slovo **U** generuje v automate **A** zo stavu S_i výstupné slovo $\underline{0}0\underline{1}-1\underline{0}$

Automat A pokrýva automat A', (**A ≥ A'**), vtedy a len vtedy, ak pre každý stav S_j automatu **A'** existuje taký stav S_i automatu **A**, že $S_i \geq S_j$.

Dva **automaty A** a **A'** sa nazývajú **ekvivalentné**, (**A ≡ A'**), vtedy a len vtedy, ak platí **A ≥ A'**, a súčasne **A' ≥ A**.

Redukcia počtu stavov konečného automatu

- má sa nájsť automat **A**, ktorý pokrýva automat **A'** a má menší resp. najmenší počet stavov zo všetkých automatov pokrývajúcich automat **A'.**

Minimálny (redukovaný) automat

- zo všetkých možných automatov pokrývajúcich daný automat má najmenší počet stavov.

Dva **stavy** S_i a S_j automatu $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ sa nazývajú **zlúčiteľné**, čo značí $S_i \approx S_j$, vtedy a len vtedy, ak pre každé vstupné slovo **U** prípustné pre **A** zo stavov S_i a S_j platí $\lambda(S_i, U) = \lambda(S_j, U)$ v prípade, že obidva výstupy sú definované.

vstupnému slovu **U** zo stavu S_i zodpovedá výstupné slovo **0-1-10**

vstupnému slovu **U** zo stavu S_j zodpovedá výstupné slovo **001--0**

Triedy zlučiteľnosti

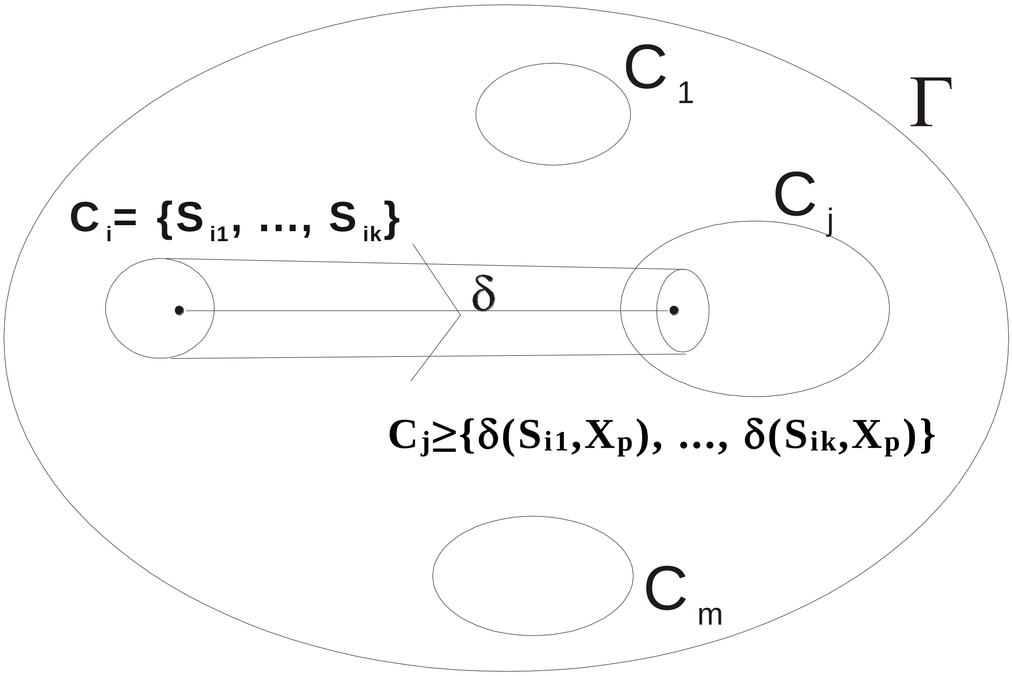
- obsahujú iba vzájomne zlúčiteľné stavy

Maximálna trieda zlučiteľnosti

- trieda zlučiteľnosti C_i, pre ktorú neexistuje žiadna iná taká trieda zlučiteľnosti C_j, že $C_i \subseteq C_j$.

Veta 1. $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ a $A' = (X, S', Y, \delta', \lambda')$ sú dva neúplne určené automaty. Ak stav $S_i \in S$ pokrýva niektorú množinu stavov $C \in S'$, potom **C** je trieda zlučiteľnosti.

Nech $\Gamma = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ je určitý súbor, v ktorom C_i sú triedy zlučiteľnosti, v množine stavov niektorého automatu $A' = (X, S', Y, \delta', \lambda')$.
Súbor Γ sa nazýva **prípustný** (prípadne uzavretý) vtedy a len vtedy, ak pre každú triedu $C_i = \{S_{i1}, ..., S_{ik}\}$ a pre každý vstup $X_p \in X$ množina stavov $\{\delta(S_{i1}, X_p), ..., \delta(S_{ik}, X_p)\}$ padne do niektorej triedy $C_j \in \Gamma$.
Súbor Γ sa nazýva **úplný**, ak každý stav automatu **A'** je obsiahnutý aspoň v jednej triede z Γ.



Obr. 7.19 Znázornenie podmienky prípustnosti súboru tried zlučiteľnosti

Veta 2. Nech $\boldsymbol{\Gamma} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ je úplný súbor tried zlučiteľnosti v množine stavov **S'** automatu **A' = (X, S', Y, δ', λ')**. Nech ďalej **A = (X, S, Y, δ, λ)** je automat s množinou stavov $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$. Potom **A** pokrýva **A'** tak, že každý stav $\mathbf{S_i} \in \mathbf{S}$ pokrýva práve jednu triedu $\mathbf{C_i} \in \boldsymbol{\Gamma}$ vtedy a len vtedy, ak súbor $\boldsymbol{\Gamma}$ je prípustný.

Nech $\boldsymbol{\Gamma} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ je súbor tried zlučiteľnosti na množine stavov automatu **A' = (X, S', Y, δ', λ')**. Automat **A = (X, S, Y, δ, λ)**, pokrývajúci automat **A'** spôsobom vyjadreným vo vete 2, sa zostaví nasledujúcim spôsobom:

Každej triede súboru $\boldsymbol{\Gamma}$ sa priradí jeden stav automatu **A**, t.j. $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$. Prechodová funkcia **δ** sa zostaví takto: Pre každý vstup $\mathbf{X_p} \in \mathbf{X}$

$$\{\delta'(S_j, X_p) \mid S_j \in C_i\} \subseteq C_k \Rightarrow \delta(S_i, X_p) = S_k.$$

Ak nasledujúce stavy $\delta'(S_j, X_p)$ nie sú definované pre žiadny stav $S_j \in C_i$, potom $\delta(S_i, X_p)$ tiež nie je definované.

Výstupná funkcia λ sa zostaví podľa vzťahu $\lambda(S_i, X_p) = \lambda'(S_j, X_p)$ pre Mealyho automat, resp. $\lambda(S_i) = \lambda'(S_j)$ pre Mooreov automat, kde S_j je ľubovoľný stav z C_i, v ktorom je funkcia λ' definovaná. Ak funkcia $\lambda'(S_j, X_p)$ nie je pre žiadny stav $S_j \in C_i$ definovaná, potom $\lambda(S_i, X_p)$, resp. $\lambda(S_i)$ je tiež nedefinovaná.

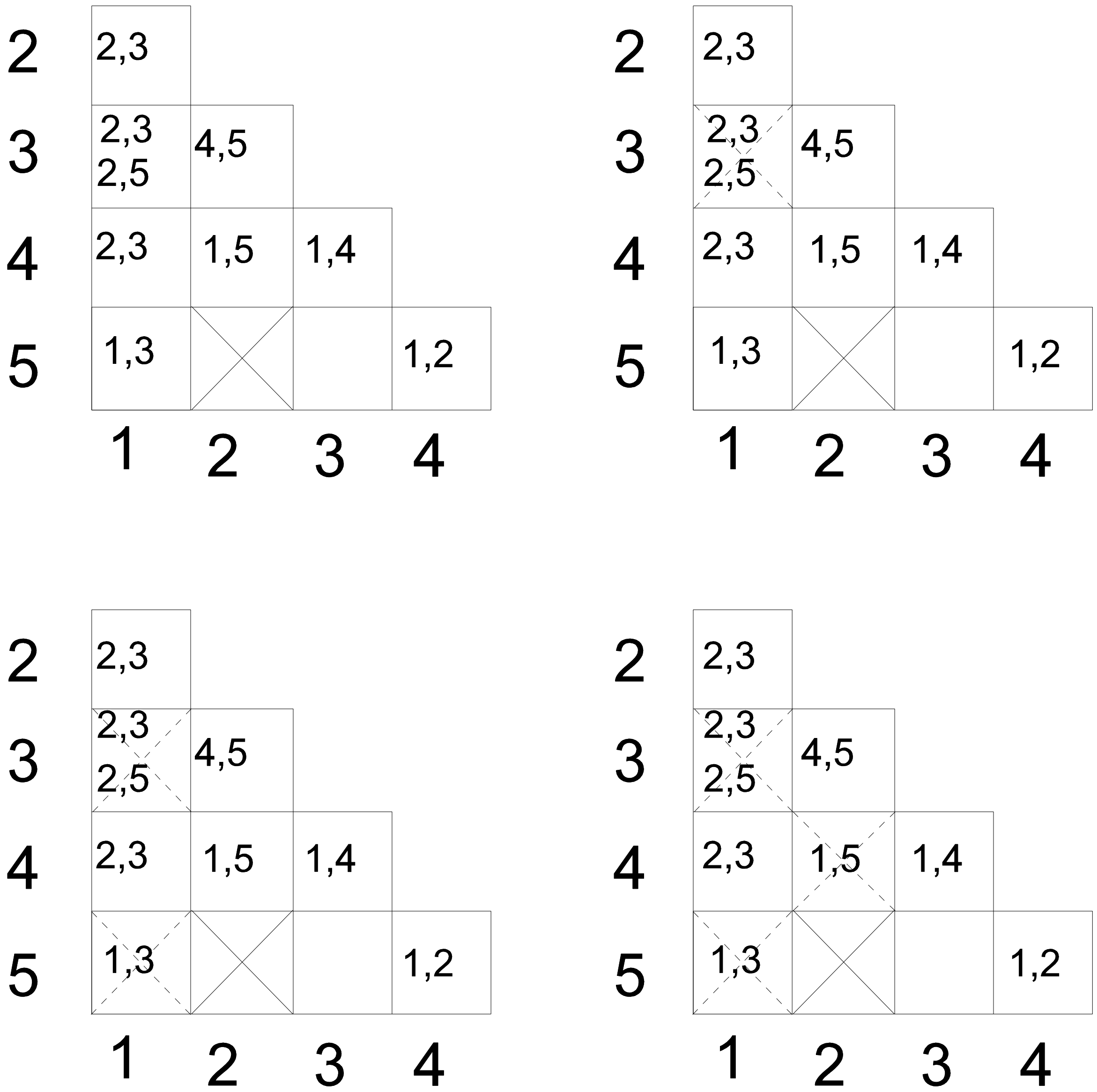
Veta 3. Dva stavy S_i a S_j automatu $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ sú zlúčiteľné vtedy a len vtedy, ak pre každý vstup $X_p = X$ platí:

1. $\lambda(S_i, X_p) = \lambda(S_j, X_p)$ pri Mealyho automate, resp. $\lambda(S_i) = \lambda(S_j)$ pri Mooreovom automate vždy vtedy, ak sú obidva výstupy definované;
2. $\delta(S_i, X_p) \approx \delta(S_j, X_p)$ v prípade, že obidva nasledujúce stavy sú definované.

Množina stavov **R** implikuje množinu stavov **P** pri danom vstupe $X_p \in X$, ak **P** je množina všetkých nasledujúcich stavov pre všetky stavy $S_i \in R$ a vstup X_p, t.j. $P = \{\delta(S_i, X_p) \mid S_i \in R\}$.

P o s t u p 1. **Zostavenie dvojíc zlučiteľnosti stavov**

1. Označia sa tie dvojice S_i, S_j pre ktoré $\lambda(S_i, X_p) \neq \lambda(S_j, X_p)$ pre niektorý vstup X_p. Tieto dvojice sú nezlúčiteľné.
2. Ak pre niektorú dvojicu S_i, S_j platí $\lambda(S_i, X_p) = \lambda(S_j, X_p)$ pri všetkých vstupoch X_p, pri ktorých sú obidva výstupy definované, potom pre túto dvojicu sa vypíšu všetky dvojice stavov S_k, S'_k, ktoré dvojica S_i, S_j implikuje.
3. Pri všetkých dvojiciach S_i, S_j, ktoré neboli doteraz označené ako nezlúčiteľné, sa preskúmajú nimi implikované dvojice.
4. Ak niektorá dvojica S_i, S_j implikuje inú dvojicu, ktorá bola označená ako nezlúčiteľná, potom dvojica S_i, S_j sa označí ako nezlúčiteľná a prejde sa ku kroku 3. Ak žiadna takáto dvojica neexistuje, potom postup končí. Všetky dvojice neoznačené ako nezlúčiteľné sú zlúčiteľné.



Obr. 7.20 Vyhľadávanie dvojíc zlúčiteľných stavov v implikačnej tabuľke

P o s t u p 2. **Určovanie maximálnych tried zlučiteľnosti.**

1. Začne sa vytvárať zoznam triedy zlučiteľnosti (**C-zoznam**) tak, že do neho zaradíme triedu, ktorá obsahuje stav prislúchajúci poslednému riadku implikačnej tabuľky.

2. Preberajú sa stĺpce implikačnej tabuľky postupne sprava doľava, a to nasledujúcim spôsobom: Nech $\mathbf{S^i}$ je množina obsahujúca všetky tie stavy, ktorým v **i**-tom stĺpci implikačnej tabuľky (priradenom stavu **I** automatu) zodpovedá neprečiarknuté políčko. Urobí sa prienik množiny $\mathbf{S^i}$ s každou triedou $\mathbf{C_j}$ v doteraz vytvorenom **C-zozname.** K **C**-zoznamu sa pridá nová trieda $\mathbf{\{\{I\} \cup \{S^i \cap C_j\}\}}$. Z nového **C**-zoznamu sa odstránia všetky duplicity a všetky triedy obsiahnuté v iných. Takto získaný **C**-zoznam predstavuje všetky maximálne triedy zlučiteľnosti daného automatu.

Tvorba zoznamu bude nasledujúca:

i $\mathbf{S^i}$	**C-zoznam**
Prvý krok	**{5}**
4 $\mathbf{S^4 = \{5\}}$	**{4, 5}**
3 $\mathbf{S^3 = \{4, 5\}}$	**{3, 4, 5}**
2 $\mathbf{S^2 = \{3\}}$	**{3, 4, 5}, {2, 3}**
1 $\mathbf{S^1 = \{2, 4\}}$	**{3, 4, 5}, {2, 3}, {1, 4}, {1, 2}**

Maximálne triedy zlučiteľnosti tvoria prípustný a úplný súbor tried zlučiteľnosti. Žiaľ, tento súbor nie je pri neúplne určených automatoch vždy minimálny.

Množina implikovaných tried zlučiteľnosti (jednoducho implikovaná množina) $\mathbf{P_i = \{C_{i1}, ..., C_{im}\}}$ pre danú triedu zlučiteľnosti $\mathbf{C_i}$ automatu **A** je tvorená množinou všetkých tried zlučiteľnosti implikovaných triedou $\mathbf{C_i}$ pri jednotlivých vstupoch automatu, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:

1. $\mathbf{C_{ij}}$ obsahuje viac ako jeden stav,
2. $\mathbf{C_{ij} \not\subseteq C_i}$
3. $\mathbf{C_{ij} \not\subseteq C_{ik}}$ ak $\mathbf{C_{ik} \in P_i}$ a $\mathbf{j \neq k}$.

Trieda zlučiteľnosti $\mathbf{C_i}$ daného automatu **A** sa nazýva **prostá** vtedy a len vtedy, ak neexistuje žiadna iná trieda zlučiteľnosti $\mathbf{C_j}$ automatu taká, že platí:

$$\mathbf{C_i \subseteq C_j \text{ a } P_i \supseteq P_j} ,$$

kde $\mathbf{P_i}$**,** $\mathbf{P_j}$ sú implikované množiny pre triedy $\mathbf{C_i}$, resp. $\mathbf{C_j}$.

Vyhľadanie množiny všetkých prostých tried zlučiteľnosti

Prosté triedy	Implikované množiny
{3, 4, 5}	{1, 4}, {1, 2}
{2, 3}	{4, 5}
{1, 4}	{2, 3}
{1, 2}	{2, 3}
{3, 4}	{1, 4}
{3, 5}	$\varnothing$
{4, 5}	{1, 2}
{1}	$\varnothing$
{2}	$\varnothing$
{4}	$\varnothing$

Výber minimálneho úplného súboru tried zlučiteľnosti:

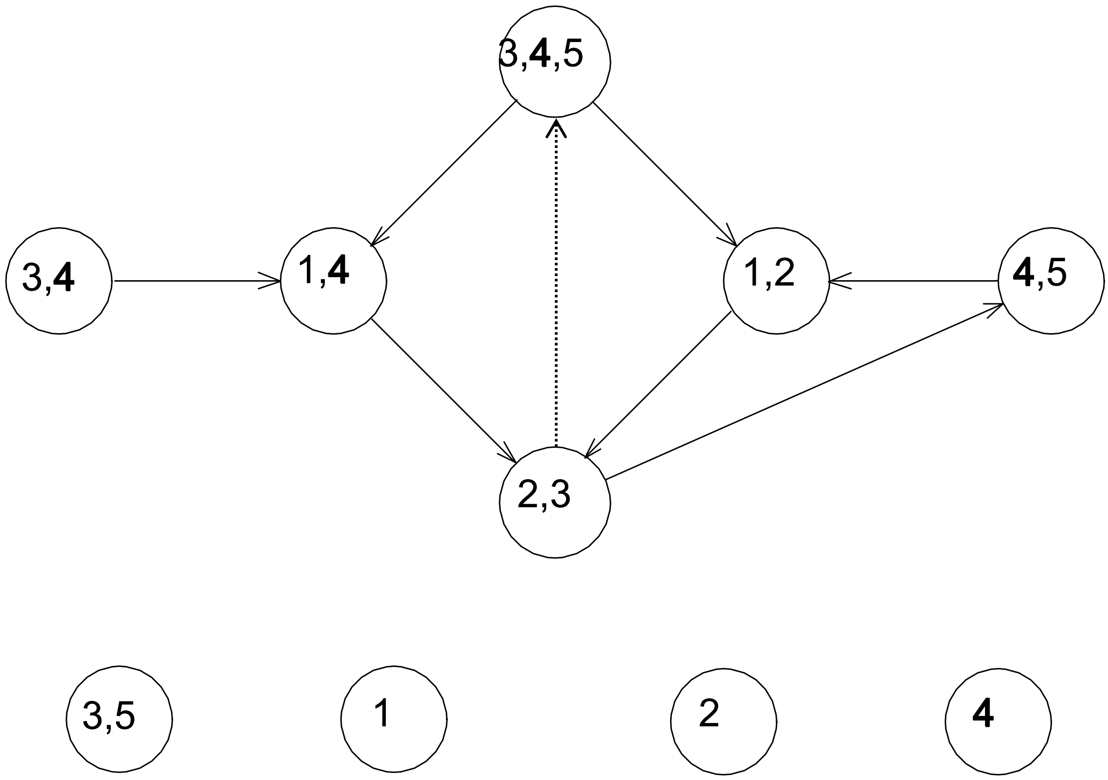
1. Každý stav je pokrytý aspoň jednou triedou súboru **(podmienka úplnosti).**

2. Ak sa vyberie niektorá prostá trieda C_i, nevyhnutne treba do súboru zaradiť ďalšie také prosté triedy C_{j1}, ..., C_{jm}, aby v jednotlivých týchto triedach boli zahrnuté všetky triedy implikovanej množiny P_i **(podmienka prípustnosti).**

3. Súbor je minimálny **(podmienka minimálnosti).**

Účinnou grafickou pomôckou pri tomto prístupe je tzv. **implikačný graf,** v ktorom možno v procese výberu tried ľahko sledovať podmienky prípustnosti.

Vrcholmi implikačného grafu sú prosté triedy zlučiteľnosti. Z vrcholu $\mathbf{C_i}$ do vrcholu $\mathbf{C_j}$ vedie orientovaná hrana vtedy a len vtedy, ak trieda $\mathbf{C_j}$ zahrňuje v sebe niektorú triedu z implikovanej množiny $\mathbf{P_i}$ pre triedu $\mathbf{C_i}$.



Obr. 7.21 Implikačný graf automatu **A** z tab 7.12

Súbor **Γ = {{12}, {23}, {45}}** je minimálny.

Každej triede súboru **Γ** sa priradí jeden stav automatu **A': {1, 2} → Q, {2, 3} → R, {4, 5} → T**, teda **S' = {Q, R, T }**.

Tab. 7.13. Automat **A'**, ktorý pokrýva automat **A** z tab. 7.12

X(t) / S(t)	A	B	C	D
Q	R^0	T^1	R^0	Q/R^0
R	R^0	T^1	Q/T^0	T^0
T	-	Q^1	Q^1	-

$s(t+1)^{Y(t)}$

V prípade úplne určeného automatu maximálne triedy zlučiteľnosti tvoria potom jediný minimálny súbor daného automatu.

Mooreov automat **A = (X, S, Y, δ, λ)** a Mealyho automat **A' = (X, S', Y, δ', λ')** sa nazývajú **ekvivalentné** vtedy a len vtedy, ak **A** ≥ **A'** a **A'** ≥ **A**, pričom výstupy automatov sú rovnaké pre všetky vstupné slová **U** ∈ **X*** **- {Λ}**.

Nech **A = (X, S, Y, δ, λ)** je Moorov automat zadaný prechodovou tabuľkou 7.14a. Ekvivalentný Mealyho automat **A' = (X, S', Y, δ', λ')** sa zostaví tak, že množina stavov **S' = S** s prechodovou funkciou **δ' = δ** a výstupnou funkciou **λ'** je definovaná vzťahom

$\lambda'(S_i, X_j) = \lambda[\delta(S_i, X_j)]$

pre každý vstup X_j a stav S_i Moorovho automatu **A** (výstup automatu **A'** je daný výstupom automatu **A** v nasledujúcom stave –

$\lambda'(S_i, X_j) = \lambda[\delta(S_i, X_j)] = \lambda[S(t+1)]$.

Tab. 7.14. Ekvivalentné automaty rôzneho typu

a - automat typu Moore;

X(t) S(t)	0	1	Y
1	2	1	1
2	6	5	0
3	2	1	0
4	1	3	0
5	3	1	0
6	5	4	0

b - automat typu Mealy

X(t) S(t)	0	1	0	1
1	2	1	0	1
2	6	5	0	0
3	2	1	0	1
4	1	3	1	0
5	3	1	0	1
6	5	4	0	0

Automat **A'** nie je minimálny napriek tomu, že Moorov automat **A** je minimálny.

Ak sa má nájsť Moorov automat **A'**, ktorý je ekvivalentný s Mealyho automatom **A,** navzájom rôznym dvojiciam $\mathbf{(S_i, Y_k); S_i \in S; Y_k \in Y;}$ Mealyho automatu, zapísaným vo vnútri prechodovej tabuľky, sa priradia rôzne stavy automatu **A'**.

Tab 7.15. Tabuľka prechodov (a) a výstupov (b) automatu typu Mealy

a)

X(t) S(t)	0	1
1	1	2
2	3	2
3	3	1

b)

X(t) S(t)	0	1
1	0	1
2	0	0
3	1	0

Prechodová a výstupná funkcia sa zostaví tak, aby platilo:

$\boldsymbol{\delta'(S_i^{Yk}, X_j) = \delta(S_i, X_j)^{\lambda(Sj,\, Xj)}}$

$\boldsymbol{\lambda'(S_i^{Yk}) = Y_k}$ pre každé $\boldsymbol{S_i^{Yk} \in S'}$ **a** $\boldsymbol{X_j \in X}$.

Tab. 7.16. Automat A typu Mealy (a) a jemu ekvivalentný automat A' typu Moore (b)

a)

X(t) S(t)	0	1
1	1^0	2^1
2	3^0	2^0
3	3^1	1^0

δ^λ

b)

X(t) S(t)	0	1	Y
1^0	1^0	2^1	0
2^0	3^0	2^0	0
2^1	3^0	2^0	1
3^0	3^1	1^0	0
3^1	3^1	1^0	1

$\boldsymbol{\delta'}$ $\boldsymbol{\lambda'}$